Complementi di analisi algebrica elementare

(C)

D.r FEDERICO AMODEO

libero docente di Geometria proiettiva
e di Storia delle Matematiche nella R. Università di Napoli;
prof. ordinario del R. Istituto tecnico di Napoli,
socio residente dell'Accademia Pontaniana, ecc.

COMPLEMENTI DI ANALISI ALGEBRICA ELEMENTARE

PARTE SECONDA DEL VOLUME SECONDO

DEGLI

ELEMENTI DI MATEMATICA

Ad uso del 2° biennio degli istituti tecnici

3ª Edizione
migliorata ed aumentata

SOMMARIO — Elementi di Analisi combinatoria. — Frazioni continue — Disequazioni e sistemi di disequazioni. — Analisi indeterminata di 1° grado. — Funzioni finite. Limiti. Applicazioni. — Diagrammi e loro applicazioni. — Funzioni continue. Derivate. Forme indeterminate. Applicazioni. — Massimi e minimi. Discussione delle funzioni. — Discussioni di equazioni e di problemi di 2° grado. — Concetto d'Integrazione.

NAPOLI
LUIGI PIERRO TIP.-EDITORE
Piazza Dante, 76
1920

ALLA CARA MEMORIA

DEI MIEI GENITORI

RAFFAELE

E

LUISA TULIMIERI

DEDICO

F. A.

PREFAZIONE ALLA 1.ª EDIZIONE

Questo libro, che completa il secondo volume dei miei Elementi di Matematica, esce quando già si apparecchia la 3ª ediz. del 1º volume. Il ritardo di diversi anni è dovuto alla necessità in cui (per ragioni che sarebbe troppo lungo a dire) mi sono trovato dal 1903 di voler cambiare da un momento all'altro l'indirizzo degli studî da me preferiti, dalla Geometria superiore alla Storia delle Matematiche. Questo ritardo però non ha danneggiato il libro che già era pronto, poiché un libro didattico non può che guadagnare dalla maggiore esperienza che l'autore ne fa nella scuola ed è appunto successo che in questi anni parecchie teorie hanno subito dei miglioramenti non lievi.

Il libro svolge in apparenza il programma di Algebra del 3º e 4º corso dell'Istituto tecnico italiano, ma in realtà contiene quelle teorie algebriche che a mio parere dovrebbe sapere, prima di metter piede nell'Università, ogni giovane che si avvia ad una carriera scientifica; sia perché esse sono utile complemento alla istruzione elementare, sia perché nella Università queste non si potrebbero sviluppare che troppo rapidamente in vista dei grandi passi che colà bisogna fare. Né sembri strano se aggiungo che alcune di queste teorie io le credo necessarie anche a diverse categorie di giovani che terminano la loro carriera di studî coll'Istituto tecnico: ai ragionieri, agli industriali, agli agrimensori.

Il capitolo dell'*analisi combinatoria*, per esempio, che si è financo cercato di mettere a base di un nuovo metodo didattico dell'insegnamento elementare delle Matematiche, non potrebbe essere ignorato da alcuno, né dovrebbe essere, specialmente dai ragionieri, ignorato lo *sviluppo della potenza del binomio* e la teoria *delle probabilità*, che tanta applicazione ha nella vita e nelle aziende di assicurazioni.

Questo capitolo, che quasi nulla chiede alle teorie meno elementari già svolte nell'Aritmetica generale e negli Elementi di Algebra, è il primo di questi Complementi. Ad esso segue il cap. delle *frazioni continue*, che riattaccano l'Aritmetica all'Algebra, e

he, coll'*analisi indeterminata* che segue nel cap. III, risolvono tanti di quei problemi usuali ed elementari che si propongono da secoli anche per ricreazione. In questo cap. III ho creduto di dover trattare con un pò di maggior dettaglio che non si usi il caso generale della risoluzione di una equazione lineare ad n incognite [1]).

A questo fa seguito l'importante teoria delle disequazioni (cap. IV), che si riattacca alla teoria delle *diseguaglianze* che si suppone svolta, come abbiamo fatto, nell'Aritmetica generale. Alla risoluzione pratica delle disequazioni ho creduto utile premettere dei teoremi generali che non sono stati assegnati in altri testi e che riescono, non pertanto, utili. Ed ho fatto vedere come la teoria delle disequazioni possa essere utile complemento alla risoluzione delle equazioni irrazionali.

I cap.i V, VI, VII, che a mio parere dovrebbero essere sviluppati nell'ultimo anno dell'insegnamento medio delle Matematiche, riuniscono quanto di più elevato si può desiderare che i giovani sappiano prima di metter piede nell'Università e nelle Accademie militari e navali.

La discussione di equazioni contenenti un parametro (cap. V) è stata trattata seguendo una via piana e logica che conduce direttamente allo scopo che si vuole raggiungere. Avrei potuto fare anche qualche cosa dippiù, cioè far vedere la rappresentazione geometrica delle equazioni contenenti un parametro, come io stesso uso nella scuola (senza che ciò mi faccia entrare nel campo della Geom. analitica, che per me incomincia quando si vogliono dall'equazione di una curva ricavare le proprietà della curva) ma ho voluto lasciare ciò alla iniziativa del professore.

Col cap. VI si entra in un argomento delicato, nel quale, per giungere alla determinazione di limiti di alcune funzioni speciali, è occorsa la continuazione e lo sviluppo dei primi concetti di funzione che io reputai necessario dare all'inizio dello studio dell'Algebra. Qui hanno trovato opportunamente luogo alcuni teoremi sulla continuità delle funzioni, però non ho voluto ec-

---

[1]) A questo riguardo io credo che sarebbe utile trovare le formole che legano i valori delle incognite, che si ottengono con un metodo, con quelli che si ottengono con qualunque altro metodo, e ciò non mi pare si sia fatto finora.

cedere in questa trattazione, e qualche dimostrazione l'ho supposta rimandando il lettore allo studio del Calcolo infinitesimale.

Nel cap. VII, col quale il libro si chiude, ossequente alle insistenze dei Congressi matematici, ho data la cognizioue della prima derivata di una funzione ed ho mostrata l'importanza di essa a far riconoscere la variazione delle funzioni; ma non ho voluto dare le regole di derivazione delle diverse funzioni semplici, né entrare nel campo del Calcolo differenziale, considerando che di queste regole non vi è bisogno nelle scuole medie, quando per la ricerca dei *massimi e minimi* delle funzioni si fa uso del metodo che qui espongo e che ho chiamato *metodo di Fermat-Monforte* [1]. Mi pare che in tal modo abbia raggiunto, per le scuole medie quel giusto equilibrio fra il bisogno di conoscere le derivate, e la difficoltà di far penetrare nei cervelli dei giovanissimi lettori le sottili disquisizioni degli infinitesimi. Qui il libro finisce con l'applicazione della teoria alla ricerca delle variazioni delle funzioni frazionarie di 2° grado.

Segue come appendice, solo per comodità dei miei alunni dell'Istituto tecnico, un cenno delle *Sezioni coniche* fatto sinteticamente e limitato semplicemente alla risoluzione grafica dei problemi più interessanti, quali sono quelli di trovare l'intersezione di una retta con una conica o di tirare le tangenti ad essa da un punto esterno, o parallele ad una retta data.

. . . .

Sento il dovere di far conoscere che alcuni degli esercizi delle disequazioni sono rilevati dalla recente pregevole pubblicazione di A. Bassi [2]), che molti problemi di 2° grado ho ricavati dalla bella raccolta di S. Ortu-Carboni [3]), e che non ho mancato di tener presente i migliori trattati di Algebra che finora si sono pubblicati.

. . . .

Napoli, li 16 Maggio 1909.

---

[1]) Amodeo, *La regola di Fermat-Monforte per la ricerca dei massimi e minimi*. Periodico di Matematica, 1909.

[2]) A. Bassi, *Esercizi e problemi di Algebra complementare*. Vol. I, Bra, 1909.

[3]) Ortu-Carboni, *Problemi elementari di Applicazioni dell'Algebra alla Geometria*. Livorno 1897.

PREFAZIONE ALLA 2.ª EDIZIONE

La prima edizione di quest'opera è stata per così dire una bozza di stampa per molteplici ragioni; e non pertanto essa ha incontrato talmente il favore dei miei colleghi che ho dovuto pensare presto a prepararne questa seconda edizione. Ciò mi ha dato l'occasione di rivederla accuratamente e migliorarla in ogni sua parte.

Poche però sono le modificazioni rilevanti apportate all'opera.

Il cap. III è stato invertito col IV, essendomi parso necessario far premettere l'uso delle disequazioni alla risoluzione delle equazioni indeterminate.

Nel cap. V, in seguito ad ogni discussione di equazione contenente un parametro ho fatto notare quale sia la sua rappresentazione geometrica, avendo notato che con facilità i giovani assimilano siffatta rappresentazione e ci trovano gusto a rintracciarla.

Ed infine, avendo potuto assicurarmi che il tentativo fatto della introduzione e dell'uso della derivata delle funzioni col metedo di Fermat-Monforte ha avuto favorevole risultato, più di quanto ardivo sperare, ed avendo potuto constatare che i giovani ci si adattano facilmente e trovano soddisfazione nel maneggio di una regola così generale, allo scopo di renderne più rapida l'applicazione, mi sono spinto questa volta ad enunciare le regole delle derivate delle funzioni più semplici ed usuali.

A me pare però che alcuni colleghi, constatata questa facilità, si sian fatti prendere la mano e addirittura vorrebbero introdurre nelle scuole medie tutto il calcolo infinitesimale con il relativo bagaglio di teoremi e di sottili considerazioni e far uso della 2ª, 3ª ed n^{ma} derivata. A questo slancio, per l'esperienza che ne ho, io non sento di associarmi; io ritengo che nemmeno sia necessario introdurre l'uso della seconda derivata, poiché l'esame diretto del segno della prima derivata basta per le questioni che si debbono trattare nelle scuole medie, esercita l'acume dei giovani alla discussione, ed evita l'uso di una regola empirica che non sempre li convince.

Napoli, Aprile 1912.

F. A.

PREFAZIONE ALLA PRESENTE EDIZIONE

In Italia l'evoluzione dei programmi per le Scuole Medie è fervida ed ascendente. Dal 1900 ad oggi il cammino è rilevante. Allora propugnai con i miei libri la introduzione del concetto di funzione nell'Algebra elementare; ora questa è un bisogno da tutti sentito. Dal 1909 propugnai l'introduzione della teoria della probabilità, del concetto di derivata nei complementi di analisi. Ora tutti chiedono che questi concetti siano applicati, il primo per gli alunni ragionieri, il secondo per tutti gli scolari di istituto o di liceo moderno. Ed io stesso che dapprincipio, per non rischiare troppo, introdussi la derivata con la regola di Fermat-Monforte, già colla seconda edizione ne allargai l'uso; però non posso tacere che la maggioranza degli scolari si stanca per apprendere le regole delle derivate di tutte le funzioni semplici; ed è perciò che io ho riserbato queste ai giovani più vivaci e svelti, per gli altri ho continuato a mantenere il metodo di Fermat-Monforte, che supplisce sempre e bene alla conoscenza della derivata, e non stanca l'alunno.

Ciò che io timidamente tentai per la rappresentazione geometrica delle funzioni e delle equazioni, ora è un bisogno da tutti voluto soddisfatto, e non si può negare che i giovani amano di trovare queste rappresentazioni, sicché io ho dato maggior sviluppo a questa parte del programma. Però ho trasportato nei capitoli VIII e IX la discussione delle funzioni, delle equazioni e dei problemi di 2° grado, parendomi che con questa si sintetizza tutto il programma delle scuole medie.

In omaggio ai nuovissimi programmi, ho aggiunto un capitolo sul concetto d'integrazione, che certamente farà un gran bene ai giovani, in ispecie a quelli che non debbano andare innanzi negli studi di matematica pura e che possono trovare l'occasione di cimentarsi colle ricerche di aree e di volumi. E con ciò l'Italia si mette in perfetta carreggiata. Più volte nelle mie pubblicazioni storiche ho

osservato che nei secoli XVII e XVIII ai giovani si apprestavano questi concetti d'integrazione nelle scuole medie di quei tempi, e non si reputava con ciò che i giovani avessero a soffrire di troppa indigestione mentale. Voglio augurare alla nostra Nazione che non si abbia a compiere nelle Università e nelle Scuole superiori il cammino a ritroso, come pare si sia iniziato, per la credenza che bisogna agevolare alle masse l'assalto alla laurea a scapito del contenuto intellettuale.

Napoli, 4 novembre 1919.

F. A.

INDICE

CAPITOLO PRIMO. Elementi di analisi combinatoria.

CAPITOLO SECONDO. Frazioni continue.

CAPITOLO TERZO. Disequazioni e sistemi di disequazioni.

CAPITOLO QUARTO. Analisi indeterminata di 1° grado.

CAPITOLO QUINTO. Funzioni finite. Limiti. Applicazioni.

CAPITOLO SESTO. Diagrammi e loro applicazioni.

CAPITOLO SETTIMO. Funzioni continue. Derivate. Forme indeterminate. Applicazioni.

CAPITOLO OTTAVO. MASSIMI E MINIMI. DISCUSSIONE DELLE FUNZIONI.

CAPITOLO NONO. DISCUSSIONI DI EQUAZIONI E DI PROBLEMI DI 2° GRADO.

CAPITOLO DECIMO. CONCETTO D'INTEGRAZIONE.

COMPLEMENTI DI ANALISI ALGEBRICA ELEMENTARE.

CAPITOLO PRIMO.

ELEMENTI DI ANALISI COMBINATORIA.

§ 1. — Disposizioni, permutazioni, inversione nelle permutazioni.

1. DISPOSIZIONI. *Diconsi disposizioni* *) *di* n *oggetti a* k *a* k *tutti i possibili gruppi che risultano assegnando sopra* k *posti, fra loro distinti,* k *degli* n *oggetti dati.*

Il numero delle disposizioni di n oggetti a k a k si indica con $D_{n,k}$.

È ovvio che il numero k dei posti non può essere maggiore del numero n degli oggetti.

Se $k=1$, ogni gruppo è di un oggetto solo, quindi i gruppi possibili sono n, perciò

$$D_{n,1}=n\ .$$

I posti assegnati si possono supporre succedentisi in un certo ordine, 1°, 2°, 3° .... ecc.; e allora ogni disposizione degli n oggetti si può rappresentare con l'allineamento dei k oggetti in un ordine determinato. Così per esempio, una disposizione delle lettere a, b, c, d, e contenente le sole lettere b, c, e si indica con

$$bce\ .$$

2. Per formare tutte le disposizioni di n oggetti a 2 a 2, bisogna far seguire a ciascuno elemento, uno per volta, ciascuno degli altri. Così per esempio, le disposizioni di quat-

*) Furono chiamate *variazioni* da Leibniz nel suo primo scritto matematico *Dissertatio de arte combinatoria*, pubblicato il 1666.

tro lettere, a, b, c, d a due a due sono:

$$\begin{matrix} ab & ba & ca & da \\ ac & bc & cb & db \\ ad & bd & cd & dc \end{matrix}.$$

Per formare le disposizioni di n oggetti a 3 a 3, bisogna far seguire a ciascun elemento, una per volta, le disposizioni dei rimanenti elementi a 2 a 2. Per es., le disposizioni degli elementi a, b, c, d, e a 3 a 3 aventi a in primo posto sono:

$$\begin{matrix} abc & acb & adb & aeb \\ abd & acd & adc & aec \\ abe & ace & ade & aed \end{matrix}.$$

Le disposizioni aventi b in primo posto sono:

$$\begin{matrix} bac & bca & bda & bea \\ bad & bcd & bdc & bec \\ bae & bce & bde & bed \end{matrix}.$$

E così potremmo scrivere quelle aventi c in primo posto, poi quelle aventi d, e poi quelle aventi e.

In generale per formare tutte le disposizioni di n oggetti a k a k si possono considerare questi oggetti dati in un ordine determinato (trattandosi di lettere si possono considerare date nell'ordine alfabetico) e far seguire a ciascuno elemento le disposizioni dei rimanenti elementi a $k-1$ a $k-1$. Ciò si ottiene praticamente anche prendendo fra questi elementi i primi $k-1$, allineati nell'ordine dato, e ponendo all'ultimo posto uno per volta ciascuno dei rimanenti, poi lasciando i primi $k-2$ elementi tal quale e ponendo al $k-1^{mo}$ posto il k^{mo} degli elementi dati, e all'ultimo posto uno per volta ciascuno dei rimanenti; così si seguita ponendo al $k-1^{mo}$ posto ciascuno dei rimanenti.

Poi si tengono fissi i primi $k-3$ elementi, e si varia l'elemento del posto $k-2^{mo}$, ecc.

Se gli elementi dati sono lettere nell'ordine alfabetico, si ottengono in questo modo le disposizioni nell'ordine con cui sarebbero scritte le parole in un vocabolario, se tutte le disposizioni avessero un significato.

3. Ricerca del numero $D_{n,k}$.

Se nelle disposizioni che hanno tutte al primo posto uno stesso elemento si sopprime questo elemento, i gruppi rimanenti sono le disposizioni dei rimanenti $n-1$ elementi a $k-1$ a $k-1$, e siccome lo stesso avviene per le disposizioni che hanno in primo posto un altro qualunque degli elementi dati, risulta che il numero $D_{n,k}$ è uguale al prodotto del numero $D_{n-1,k-1}$ per n. Così si ha l'identità:

$$D_{n,k} = n D_{n-1,k-1} ,$$

da questa diminuendo n e k di un'unità per volta si ha:

$$D_{n-1,k-1} = (n-1) D_{n-2,k-2}$$
$$D_{n-2,k-2} = (n-2) D_{n-3,k-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_{n-k+2,2} = (n-k+2) D_{n-k+1,1} = (n-k+2)(n-k+1) .$$

Moltiplicando tutte queste eguaglianze membro a membro tra loro e sopprimendo i fattori comuni ai due membri, si ha:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1) ,$$

e ciò esprime che: *il numero delle disposizioni di* n *oggetti a* k *a* k *è uguale al prodotto di* k *numeri interi, consecutivi, decrescenti, a partire da* n.

4. Permutazioni. *Se* k *è uguale ad* n *le disposizioni si dicono permutazioni di* n *elementi e il loro numero si indica con* P_n, *ed è uguale al prodotto:*

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)n .$$

Questo numero si può scrivere:

$$P_n = n!$$

ovvero

$$P_n = \lfloor n$$

e si legge *fattoriale* di n, oppure *facoltà* di n.

Per avere un' idea della grandezza del numero che esprime le permutazioni degli elementi al crescere lento del numero degli elementi basta tener presente il seguente esempio:

Dodici persone si seggono a tavola, ma non essendo tutte contente del posto avuto, e delle persone che affiancano, convengono che ogni due minuti cambieranno posto disponendosi in tutti i modi possibili, affinché tutti siano egualmente trattati. Si vuol sapere quanto tempo dovrebbe durare il pranzo per accontentarli.

Il numero delle disposizioni è 12!; quindi il tempo che dovrebbe durare la tavola è di minuti $2 \cdot 12! =$ anni 1848, qualora non si perda tempo per altri bisogni.

5. Dicesi *permutazione fondamentale* quella in cui gli oggetti dati si seguono nell' ordine assegnato; così degli elementi a_1, a_2, a_3, a_4 la permutazione fondamentale è

$$a_1 a_2 a_3 a_4 .$$

Le permutazioni di due elementi a_1, a_2 sono due $a_1 a_2$ ed $a_2 a_1$, cioè la *fondamentale* e l' *inversa*.

Le permutazioni di tre elementi a_1, a_2, a_3 si ottengono facendo seguire a_1 dalle permutazioni di a_2 ed a_3; a_2 dalle permutazioni di a_1 ed a_3; a_3 dalle permutazioni di a_1 ed a_2. Esse sono:

$$\begin{array}{ccc} a_1 a_2 a_3 & a_2 a_1 a_3 & a_3 a_1 a_2 \\ a_1 a_3 a_2 & a_2 a_3 a_1 & a_3 a_2 a_1 \; . \end{array}$$

Le permutazioni di quattro elementi a_1, a_2, a_3, a_4; si ottengono facendo seguire a_1 dalle permutazioni di a_2, a_3, a_4; ecc. Così si ha:

$$\begin{array}{cccc} a_1 a_2 a_3 a_4 & a_2 a_1 a_3 a_4 & a_3 a_1 a_2 a_4 & a_4 a_1 a_2 a_3 \\ a_1 a_2 a_4 a_3 & a_2 a_1 a_4 a_3 & a_3 a_1 a_4 a_2 & a_4 a_1 a_3 a_2 \\ a_1 a_3 a_2 a_4 & a_2 a_3 a_1 a_4 & a_3 a_2 a_1 a_4 & a_4 a_2 a_1 a_3 \\ a_1 a_3 a_4 a_2 & a_2 a_3 a_4 a_1 & a_3 a_2 a_4 a_1 & a_4 a_2 a_3 a_1 \\ a_1 a_4 a_2 a_3 & a_2 a_4 a_1 a_3 & a_3 a_4 a_1 a_2 & a_4 a_3 a_1 a_2 \\ a_1 a_4 a_3 a_2 & a_2 a_4 a_3 a_1 & a_3 a_4 a_2 a_1 & a_4 a_3 a_2 a_1 \; . \end{array}$$

6. INVERSIONI DELLE PERMUTAZIONI. Due elementi in una permutazione fanno *inversione* se non si seguono nell'ordine assegnato.

Per cercare il numero delle inversioni di una permutazione si contano le inversioni che ciascuno elemento fa con tutti quelli che lo seguono. Così nella permutazione

$$5\,4\,1\,3\,2$$

dei primi cinque numeri della serie naturale, il 5 fa quattro inversioni, il 4 ne fa tre, l'1 nessuna, il 3 ne fa una: in tutto sono $4+3+1=8$.

Le permutazioni si dicono di *classe pari*, se fanno un numero pari d'inversioni, di *classe dispari* se ne fanno un numero dispari.

La permutazione *inversa*, cioè quella in cui gli elementi si succedono in ordine inverso, presenta il massimo numero d'inversioni; così la permutazione

$$a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 \, .$$

presenta 15 inversioni.

Se gli elementi sono n le inversioni sono date dalla somma:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+4+3+2+1 \; ;$$

di cui i termini formano una progressione aritmetica, ed è noto che essa

$$=\frac{n(n-1)}{2} \, .$$

7. Teor. I.° *Se in una permutazione si scambiano tra loro due elementi qualsivogliano la permutazione cambia classe.*

Distingueremo due casi, se gli elementi sono consecutivi o non:

1.° Caso. Sia la permutazione:

$$\mathrm{A} a_i a_h \mathrm{B} \; ;$$

dove A rappresenta il gruppo degli elementi che precedono a_i e B il gruppo degli elementi che seguono a_h. Scambiando

gli elementi a_i ed a_h tra loro, si ha:

$$Aa_h a_i B \,.$$

Con questo non si sono alterate le inversioni che gli elementi di A fanno fra loro e con quelli che seguono, né si sono alterate le inversioni che gli elementi di B fanno fra loro, né quelle di a_i ed a_h con gli elementi di B. Ma a_i ed a_h se prima non facevano inversione dopo la fanno, e viceversa, dunque le inversioni di queste permutazioni differiscono di un'unità, e perciò sono di classi differenti.

2.° CASO. Sia la permutazione:

$$Aa_i Ca_h B \;;$$

dove C rappresenta il gruppo degli elementi compresi fra a_i ed a_h. Supponiamo che C abbia r elementi. Per passare dalla permutazione data alla permutazione

$$Aa_h Ca_i B$$

si potrà dapprima scambiare a_i con ciascuno degli elementi di C e con a_h e si perverrà alla permutazione $ACa_h a_i B$. Con ciò la permutazione ha cambiato classe $r+1$ volte. Poi si scambia a_h successivamente con ciascuno degli elementi di C e si perverrà in

$$Aa_h Ca_i B \;;$$

ma con ciò la permutazione ha cambiato classe altre r volte, quindi in tutto ha cambiato classe $2r+1$ volte, cioè un numero dispari di volte e quindi la permutazione data ha cambiato classe.

8. Teor. 2.° *Di tutte le permutazioni di* n *elementi, il numero di quelle di classe pari è uguale al numero di quelle di classe dispari.*

Infatti, se in tutte le permutazioni di n elementi due elementi determinati, e sempre gli stessi, si scambiano fra loro, ogni permutazione cambia classe, e diventa un'altra

delle stesse $n!$ permutazioni, quindi il numero di quelle di classe pari deve essere uguale al numero di quelle di classe dispari.

9. Sostituzioni.

Dicesi sostituzione l'operazione con la quale si passa da una permutazione di n *elementi, ad un'altra qualunque degli stessi elementi.* Essa si rappresenta scrivendo le permutazioni l'una sotto l'altra in una parentesi; così:

$$\begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

indica che alla permutazione $a_2 a_4 a_3 a_1$ si sostituisce l'altra $a_4 a_3 a_1 a_2$, e precisamente all'elemento a_2 sostituisce a_4; ad a_4, a_3; ad a_3, a_1; e ad a_1, a_2.

Una sostituzione si può indicare brevemente con una qualunque lettera maiuscola, così si scriverà

$$S = \begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Una sostituzione si dice *inversa* di un' altra S quando differisce da essa per lo scambio delle due permutazioni fra loro, e s' indica con S_{-1}, così;

$$S_{-1} = \begin{pmatrix} a_2 & a_4 & a_3 & a_1 \\ a_4 & a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Una sostituzione non cambia se si esegue una medesima permutazione tanto al suo numeratore che al suo denominatore, perchè ad ognuno degli elementi della permutazione nel denominatore sostituisce lo stesso elemento del numeratore.

Da ciò si deduce che per confrontare fra loro due sostituzioni e vedere se sono differenti o no, basterà ridurle allo stesso denominatore e dopo confrontare i soli numeratori.

E si deduce ancora che tutte le sostituzioni che si possono fare con n elementi sono tante quante sono le permutazioni di questi elementi cioè $\underline{|n}$.

La sostituzione che ha il numeratore eguale al denominatore si dice *identità*, e si rappresenta con 1.

Se la sostituzione si effettua sostituendo a ciascun elemento del denominatore il seguente ed all'ultimo il primo la sostituzione si dice *circolare*.

Per esempio è circolare la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix};$$

e si dice così, perché se gli n elementi della sostituzione si scrivessèro successivamente nei punti che dividono una circonferenza in n parti uguali, questa sostituzione si effettuerebbe facendo rotare la circonferenza su sé stessa di $\frac{1}{n}$ di giro.

10. Teor. I.° Se *una sostituzione non è circolare equivale a più sostituzioni circòlari eseguite su gruppi di elementi tutti differenti.*

Per esempio la sostituzione:

$$S = \begin{pmatrix} a_7 & a_5 & a_8 & a_2 & a_4 & a_1 & a_3 & a_{10} & a_9 & a_6 \\ a_4 & a_1 & a_7 & a_3 & a_8 & a_5 & a_2 & a_9 & a_6 & a_{10} \end{pmatrix}$$

e eguale alla seguente

$$\begin{pmatrix} a_7 & a_8 & a_4 \\ a_4 & a_7 & a_8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_5 & a_1 \\ a_1 & a_5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{10} & a_6 & a_9 \\ a_9 & a_{10} & a_6 \end{pmatrix}$$

ed equivale a quattro sostituzioni circolari fatte su quattro gruppi dei 10 elementi della permutazione.

Per dimostrare in generale il teorema, osserviamo che se n sono gli elementi della sostituzione non circolare e se supponiamo che essa sostituisca ad a_1, a_2, ad a_2, a_3, ad a_3, a_4, ecc., siccome per ipotesi essa non è circolare gli elementi $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ non potranno essere sempre diversi fra loro fino all'ultimo. Supponiamo perciò che il primo elemento che si riscontri eguale ad uno dei precedenti sia a_{k+1}, quello che si sostituisce ad a_k. L'elemento a_{k+1} deve essere eguale ad a_1, perché se fosse eguale ad un

altro elemento intermedio, p. es. a_3, la sostituzione farebbe corrispondere ad a_2 ed a_k lo stesso elemento a_3, quindi dovrebbe essere $a_k = a_2$, ed allora non sarebbe più a_{k+1} ma a_k il primo elemento che si incontrerebbe eguale ad uno dei precedenti, contro l'ipotesi. Parimenti si dimostrerebbe che partendo da un altro elemento a_s o si forma un ciclo con tutti gli elementi che rimangono o con una parte di essi e così di seguito.

II. Se S e T sono due sostituzioni fra gli stessi elementi, si chiama *prodotto* di S e T, la sostituzione che si ottiene eseguendo prima sugli n elementi la sostituzione S e poi la sostituzione T. Il detto prodotto s'indica con ST.

Per es. se

$$S = \begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix} \quad , \quad T = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_1 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$ST = \begin{pmatrix} a_2 & a_4 & a_3 & a_1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_4 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} .$$

Se invece si facesse il prodotto TS si avrebbe

$$TS = \begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} ,$$

che è diverso da ST.

Quindi si può conchiudere che *il prodotto di due sostituzioni non è in generale indipendente dall'ordine dei fattori (non è commutabile).*

Se un prodotto di due particolari sostituzioni resta inalterato con lo scambio dei fattori, si dice che le due sostituzioni sono *commutabili*, *commutative o permutabili* fra loro.

Per es. ogni sostituzione è commutativa con la sua inversa, perché il loro prodotto in un modo o nell' altro è l'unità

$$SS_{-1} = S_{-1}S = 1 .$$

Nel prodotto ST si dice che S è moltiplicata a destra.

per T, e che T è moltiplicata a sinistra per S; da ciò che si è detto non è indifferente moltiplicare una sostituzione a destra o a sinistra per un' altra sostituzione.

Se ad una permutazione si applica due volte la stessa sostituzione si dice che si è fatto il *quadrato* o la *seconda potenza* di quella sostituzione. Se si applica tre, quattro volte, ecc. si dice che si fa la *3ª potenza* o *cubo*, la *4ª potenza*, ecc.

Queste potenze successive s'indicano con $S^2, S^3, S^4, \ldots$ e per analogia si porrà $S^0 = 1, S^1 = S$. Per es.

posto $S^1 = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & a_4 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, si ha $S^2 = \begin{pmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$.

$$S^3 = \begin{pmatrix} a_2 & a_4 & a_1 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \qquad S^4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Operando più volte di seguito con la sostituzione S^{-1}, inversa di S, si avranno le potenze di questa che s'indicano anche con S^{-2}, S^{-3}, S^{-4}, e si chiamano *potenze negative* di S.

È ovvio che

$$S^h \cdot S^k = S^{h+k}$$

$$S^{-m} = (S^m)^{-1} .$$

Il prodotto di due potenze di una stessa sostituzione è commutativo.

Il numero delle sostituzioni che si possono fare con le permutazioni di n elementi è limitato ed $= n!$, quindi le potenze di una di esse non sono tutte distinte.

12. Teor. 2.° *La prima delle successive potenze di una sostituzione, che coincide con una delle precedenti potenze, è necessariamente l' identità* S^0.

Infatti, se S^r è la prima potenza di una sostituzione S, supposta non circolare, che si incontri eguale ad una delle precedenti, S^r (per $r < p$), deve essere

$$S^p = S^r$$

e poiché questa eguaglianza si può anche scrivere

$$S^r S^{p-r} = S^r S^0 ,$$

sopprimendo il fattore S^r a sinistra resta

$$S^{p-r} = S^0 .$$

Dunque S^{p-r} coincide con una delle precedenti potenze di S, ma per ipotesi la prima potenza che coincide con una delle precedenti è S^p; dunque deve essere

$$p - r = p$$

e perciò $r = o$, e quindi anche $S^p = S^0 = 1$, e ciò dimostra il teorema.

13. Disposizioni con ripetizioni. *Diconsi disposizioni con ripetizioni quelle disposizioni in cui ogni elemento si può ripetere quante volte si vuole.*

Così per es. delle lettere a, b, c, d le disposizioni a 3 a 3 con ripetizioni sono:

$$\begin{array}{lll} aaa & aba & \ldots \\ aab & abb & \ldots \\ aac & abc & \ldots \\ aad & abd & \ldots \end{array}$$

Per formare queste disposizioni si usa la stessa regola data per le altre senza ripetizioni, salvo che uno stesso elemento si può ripetere una o più volte.

Il loro numeso s'indica con $D'_{n,k}$, ed evidentemente $D'_{n,1} = D_{n,1} = n$, e può anche essere $n < k$.

Vediamo ora qual'è questo numero. Se in tutte le disposizioni che cominciano con la stessa lettera sopprimiamo questa prima lettera comune, i gruppi che rimangono saranno tutte le disposizioni con ripetizioni degli n elementi a $k-1$ a $k-1$, e siccome ciò avviene per tutte le disposizioni che cominciano cou qualunque altra lettera,

avremo

$$D'_{n,k} = nD'_{n,k-1} ;$$

da questa diminuendo k di un'unità per volta, si ha

$$D'_{n,k-1} = nD'_{n,k-2} ,$$
$$D'_{n,k-2} = nD'_{n,k-3} ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$D'_{n,2} = nD'_{n,1} = n \times n ,$$

e moltiplicando membro a membro queste uguaglianze, si ha:

$$D'_{n,k} = n^k .$$

Se $n = k$, si hanno le permutazioni con ripetizioni, le quali s'indicano con P'_n e si ha:

$$P'_n = n^n .$$

14. Se nelle permutazioni di n elementi senza ripetizione, α degli elementi diventano eguali fra loro, il loro numero si riduce.

Indichiamolo con $P_n^{(\alpha)}$ e calcoliamolo.

Se in queste permutazioni date, gli α elementi che sono eguali fra loro li distinguiamo con un segno qualunque e poi li permutiamo in quelli posti che occupano, da ognuna delle permutazioni ne avremo $\alpha!$ ed otterremo così tutte le permutazioni che si avrebbero se tutti gli elementi fossero distinti, quindi:

$$P_n^{(\alpha)} \times \alpha! = P_n ,$$

da cui si ha:

$$P_n^{(\alpha)} = \frac{P_n}{\alpha!} = \frac{n!}{\alpha!} .$$

Se invece nelle permutazioni $P_n^{(\alpha)}$ altri β elementi diventano uguali fra loro il numero delle permutazioni distinte si riduce. Indicandolo con $P_n^{(\alpha\beta)}$, sarà:

$$P_n^{(\alpha\beta)} = \frac{P_n^{(\alpha)}}{\beta!} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!} ,$$

quindi in generale:

$$P_n^{(\alpha\beta\gamma\ldots)} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots},$$

con la condizione però che sia $\alpha + \beta + \gamma + \ldots \leqq n$.

§ 2. — Combinazioni semplici.

15. *Diconsi combinazioni *) semplici di* n *oggetti a* k *a* k *tutti i possibili gruppi di* k *oggetti ciascuno, che si possono formare con gli* n *oggetti dati.*

Due gruppi devono differire almeno per un oggetto.

Il numero delle combinazioni di n oggetti a k a k si indica con $C_{n,k}$. Dalla definizione si deduce che:

$C_{n,1} = n$; $C_{n,n} = 1$; e deve essere $k \leqq n$.

16. Se degli oggetti di una combinazione si fanno tutte le possibili permutazioni, e ciò si fa per tutte le combinazioni, si ottengono tutte le disposizioni degli n oggetti a k a k. Quindi si ha l'identità:

$$C_{n,k} \times P_k = D_{n,k}, \qquad (1)$$

cioè, *il numero delle combinazioni di* n *oggetti a* k *a* k *moltiplicato pel numero delle permutazioni di* k *oggetti è uguale al numero delle disposizioni di* n *oggetti a* k *a* k.

17. Formazione delle combinazioni.

Per formare le combinazioni di n oggetti a 2 a 2 bisogna accoppiare a ciascuno degli oggetti, considerati in un determinato ordine, uno per volta, tutti i seguenti. Così per esempio dei 5 numeri: 1, 2, 3, 4, 5 le combinazioni a due a due, dette *ambi*, sono:

12	23	34	45
13	24	35	
14	25		
15			

*) Furon dette *complessioni* da Leibniz nella produzione citata del 1666, ed in particolare *combinazioni* per $k = 2$, *conternazioni* per $k = 3$, ecc.

Per formare le combinazioni di n oggetti a 3 a 3, si farà seguire ciascuno degli elementi dalle combinazioni a 2 a 2 degli $n-1$ oggetti che lo seguono; così dei numeri: 1, 2, 3, 4, 5 le combinazioni a 3 a 3, dette *terni*, sono le seguenti:

123	234	345
124	235	
125	245	
134		
135		
145		

In generale per formare di n oggetti, considerati in un certo ordine, le combinazioni a k a k si farà seguire ciascuno degli oggetti dalle combinazioni a $k-1$ a $k-1$ degli oggetti che lo seguono.

18. Determinazione di $C_{n,k}$.

1.° Dalla formola (1) del numero **16** si ha:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{h!}.$$

2.° Ciò si può dimostrare anche nel seguente modo: Se si vogliono ottenere le combinazioni a k a k da quelle degli stessi elementi a $k-1$ a $k-1$, bisognerà a ciascuna di queste aggiungere uno per volta ciascuno degli $n-(k-1)$ elementi che essa non contiene; quindi da ognuna se ne hanno $n-k+1$, ma queste non sono tutte diverse, perché ognuna si troverà ripetuta k volte (infatti, sopprimendo da esse un elemento per volta, si hanno k diverse combinazioni a $k-1$ a $k-1$ da cui essa si poteva ricavare) cosicché si ha questa identità:

$$C_{n,k} = C_{n,k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}, \qquad (2)$$

e analogamente, diminuendo k di un'unità per volta,

$$C_{n,k-1} = C_{n,k-2} \cdot \frac{n-k+2}{k-1} ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{n,2} = C_{n,1} \times \frac{n-1}{2} = n \cdot \frac{n-1}{2} ;$$

e moltiplicando fra loro membro a membro queste uguaglianze, si ha:

$$C_{n,k} = n \times \frac{n-1}{2} \times \ldots \times \frac{n-k+2}{k-1} \times \frac{n-k+1}{k} ,$$

ovvero,

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{k!} . \qquad (3)$$

Corollario. La formola

$$C_{n,k} = C_{n,k-1} \times \frac{n-k+1}{k}$$

si può anche dedurre osservando che la (3) si può scrivere

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)}{1.2.3\ldots(k-1)} \cdot \frac{n-k+1}{k} .$$

Essa permette di trovare il numero delle $C_{n,k}$ quando si conosce quello delle $C_{n,k-1}$.

In seguito, per brevità, il numero $C_{n,k}$ s'indica con $\binom{n}{k}$ e si legge: *n su k.*

Cosicché la formola (2) si può scrivere

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \frac{n-k+1}{k} .$$

19. Teor. I.° *Dimostrare che*

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-1)!} .$$

Infatti, moltiplicando numeratore e denominatore del se-

condo membro della (3) per $(n-k)!$ si ha:

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots3.2.1}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

20. Teor. 2.° *Il numero delle combinazioni di* n *elementi a* k *a* k *è eguale al numero delle combinazioni degli stessi* n *elementi a* n — k *a* n — k.

Infatti, per la precedente formola

$$C_{n,n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_{n,k} .$$

Così, per esempio, il numero delle combinazioni che si possono formare con 90 numeri a 87 a 87 è eguale a quello delle combinazioni degli stessi 90 numeri a 3 a 3, cioè

$$= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480 .$$

Però, affinché questo teorema non abbia eccezioni bisogna convenire che $C_{n,o}$, che non ha significato, sia uguale ad 1, affinché possa essere uguale a $C_{n,n}$.

21. Teor. 3.° *Dimostrare che:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} ,$$

(teor. di Stifel) *).

Faremo di questo teorema due dimostrazioni:

1.ª Dimostrazione. Sappiamo che (**18**, (2))

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} \times \frac{n-k}{k} ,$$

*) Michael Stifel, nato ad Esslingen nel 1486 o 7. morto a Jena nel 1567, ha notata la prima volta questa formola nella sua *Arithmetica integra* pubblicata il 1544 a Nurnberg.

e sostituendo nel secondo membro della relazione da dimostrare tale valore, si ha:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n-1}{k-1}\left[1+\frac{n-k}{k}\right]=$$
$$=\binom{n-1}{k-1}\frac{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots(k-1)k}=\binom{n}{k},$$

che è quanto bisognava dimostrare.

2.ª Dimostrazione. Se in tutte le combinazioni di n elementi a k a k, che contengono un determinato elemento sopprimiamo questo elemento, i gruppi che ne risultano sono le combinazioni degli altri $n-1$ elementi a $k-1$ a $k-1$, quindi in tutto sono $\binom{n-1}{k-1}$. Le rimanenti combinazioni a k a k dei rimanenti elementi sono date da $\binom{n-1}{k}$; e quindi si ricava la formula

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}.$$

Si noti che nel caso di $k=1$, la formola precedente contiene nel secondo membro un simbolo che si è definito nel n. **20** soltanto per comodità, ma ciononostante la formola sussiste anche per questo caso; poiché

$$\binom{n}{1}=\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}=1+(n-1)=n.$$

22. Applicazioni.

1.ª La formula precedente può servire a trovare rapidamente i numeri delle combinazioni di n oggetti a 2 a 2, a 3 a 3 a 4 a 4, ecc., quando si conoscono quelli di $n-1$ oggetti.

Così, essendo $\binom{1}{0}=1$, $\binom{1}{1}=1$, si ha

$$\binom{2}{1}=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2,$$

e completando con $\binom{2}{0}=1$, $\binom{2}{2}=1$, risulta (ciò che era anche ovvio) che le combinazioni di 2 oggetti a 0 a 0, a 1, a 1, a 2 a 2, sono rispettivamente

$$1\ ,\ 2\ ,\ 1\ .$$

Da ciò si deduce che

$$\binom{3}{1}=\binom{2}{0}+\binom{2}{1}=1+2=3\quad,\quad\binom{3}{2}=\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=2+1=3$$

e completando con $\binom{3}{0}=1$, $\binom{3}{3}=1$, risulta che le combinazioni di 3 oggetti a 0 a 0, a 1 a 1, a 2 a 2, a 3 a 3 sono rispettivamente

$$1\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 1\ .$$

Per avere le combinazioni di 4 oggetti a 1 a 1, a 2 a 2, a 3 a 3, basta sommare rispettivamente 1 e 3, 3 e 3, 3 e 1, e completandoli con i numeri $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{4}$, si hanno per le combinazioni di 4 oggetti i numeri

$$1\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 4\ ,\ 1\ .$$

Se scriviamo queste file l'una sotto all'altra e poniamo in testa il numero 1 si ha il quadro seguente:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1\\
\end{array}$$

. . . .

che costituisce il celebre *triangolo di Tartaglia* *), nel quale, eccetto i numeri estremi, che sono tutti delle unità, ogni altro numero è la somma dei due numeri della fila superiore che gli stanno più vicini.

2.ª Numeri figurati. *Dimostrare che:*

$$\binom{k+l}{k+1}=\binom{k+l-1}{k}+\cdots+\binom{k+2}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}.$$

Infatti, sappiamo che:

$$\binom{k+l}{k+1}=\binom{k+l-1}{k}+\binom{k+l-1}{k+1},$$

e per l'istessa ragione si ha:

$$\binom{k+l-1}{k+1}=\binom{k+l-2}{k}+\binom{k+l-2}{k+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{k+2}{k+1}=\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}=\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}.$$

Sommando membro a membro tutte queste uguaglianze si ha la formola che bisognava dimostrare e che scriveremo:

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{k+l-1}{k}=\binom{k+l}{k+1}.$$

Tutti i numeri del 1° membro di questa relazione si chiamano *numeri figurati* del k^{mo} ordine, e sono rispettivamente il 1° il 2°... e l'l^{mo} numero figurato del k^{mo} ordine. La formola dice che:

La somma di l numeri figurati consecutivi di uno stesso

---

*) Nicolò Tartaglia, nato a Brescia nel 1500, morto a Venezia nel 1557, pubblicò questo triangolo nel 1556, un anno prima della sua morte, nell'opera *General trattato dei numeri et misure* (cfr. Parte II, p. 69 e 71) e ne fece larga applicazione alla ricerca delle regole per la estrazione delle radici di qualunque indice dai numeri interi. Fu soltanto nel 1654, un secolo dopo, che Blaise Pascal, nato a Clermont nel 1623, morto a Parigi il 1662, studiò a fondo le proprietà di questo famoso triangolo aritmetico, nell'opera *Traité du triangle arithmétique*, ed è per ignoranza storica che è generalmente indicato col nome di triangolo di Pascal.

ordine a cominciare dal 1° è uguale all' l^{mo} numero figurato dell'ordine successivo.

I numeri figurati del 2° ordine si chiamano *numeri triangolari*; quelli del 3° ordine si chiamano *numeri tetraedrici.*

3.ª Sappiamo che il numero delle combinazioni di n elementi a k a k è uguale al numero delle combinazioni degli stessi elementi ad $n-k$ ad $n-k$; applicando questo teorema alla relazione ultima trovata, si ha:

$$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\binom{k+2}{2}+\cdots+\binom{k+l-1}{l-1}=\binom{k+l}{l-1}.$$

Nel triangolo di Tartaglia i numeri situati sopra una linea parallela ad uno dei lati contenenti le unità sono numeri figurati di uno stesso ordine, e la somma dei primi n si legge nella intersezione della parallela seguente e della orizzontale che segue l'ultimo numero. Così la somma di $1+4+10+20+35$ è 70.

Si vegga per le altre proprietà di questo triangolo il n. **31**.

4.ª *Dimostrare che:*

$$\binom{u+v}{k}=\binom{u}{k}+\binom{u}{k-1}\binom{v}{1}+\binom{u}{k-2}\binom{v}{2}+\cdots+\binom{v}{k}.$$

Supponiamo che gli elementi u sieno rossi e quelli v sieno verdi. Se dei rossi formiamo tutte le combinazioni a k a k ne avremo $\binom{u}{k}$. Poi, se dei rossi facciamo le combinazioni a $k-1$ a $k-1$ e accoppiamo ciascuna di esse con ciascun elemento verde, si avranno tante combinazioni quante ne indica il prodotto $\binom{u}{k-1}\binom{v}{1}$.

Poi, se i rossi li combiniamo a $k-2$ a $k-2$, e queste combinazioni le accoppiamo con quelle dei verdi a 2 a 2, si avranno tante combinazioni quante ne indica il prodotto $\binom{u}{k-2}\binom{v}{2}$; e così di seguito.

Ma ciò facendo troveremo eseguite tutte le combinazioni degli elementi rossi e verdi a k a k, quindi la formola è vera.

§ 3. — Combinazioni con ripetizioni.

23. *Diconsi combinazioni con ripetizioni, quelle combinazioni nelle quali un oggetto può ripetersi una o più volte.*

Così, mentre con gli oggetti a, b, c si possono fare soltanto le combinazioni semplici a due a due:

$$ab \quad ac \quad bc\,,$$

si potranno invece fare le seguenti combinazioni con ripetizioni:

$$\begin{matrix} aa & bb & cc\,. \\ ab & bc & \\ ac & & \end{matrix}$$

Il numero delle combinazioni con ripetizioni di n oggetti a k a k s'indica con $C'_{n,k}$.

Per esse, come per le disposizioni con ripetizione, $C'_{n,1} = C_{n,1} = n$, e può invece essere $n < k$.

24. Per fare le combinazioni con ripetizioni di n oggetti a due a due, ad ognuno di essi si accoppierà sé stesso e ciascuno degli altri che lo seguono nell'ordine assegnato.

Così di 4 lettere, a, b, c, d, le combinazioni con ripetizioni a due a due sono:

$$\begin{matrix} aa & bb & cc & dd\,. \\ ab & bc & cd & \\ ac & bd & & \\ ad & & & \end{matrix}$$

Per fare le combinazioni con ripetizioni a tre a tre, si farà seguire ciascuno degli elementi dalle combinazioni con ripetizioni di quell'elemento e di quelli che lo seguono a due a due. Così delle 4 lettere a, b, c, d, le combinazioni

a tre a tre con ripetizioni sono:

aaa	*bbb*	*ccc*	*ddd* .
aab	*bbc*	*ccd*	
aac	*bbd*	*cdd*	
aad	*bcc*		
abb	*bcd*		
abc	*bdd*		
abd			
acc			
acd			
add			

25. Ricerca del numero $C'_{n,k}$.

1.° Modo. In tutte le $C'_{n,k}$ combinazioni sono contenuti $kC'_{n,k}$ elementi, e siccome tutti gli elementi sono ripetuti un egual numero di volte, così ogni elemento sarà scritto $\frac{kC'_{n,k}}{n}$ volte.

Se si sopprime un elemento una sol volta in tutte le combinazioni che lo contengono, i gruppi che così risultano, di $k-1$ elementi ciascuno, costituiscono le $C'_{n,k-1}$ combinazioni pure di n elementi ma con ripetizioni a $k-1$ a $k-1$ ed in esse ogni elemento è scritto

$$\frac{(k-1)\,C'_{n,k-1}}{n} \text{ volte ;}$$

cosicchè aggiungendo a questo numero il numero degli elementi soppressi, che sono $C'_{n,k-1}$, si avrà il numero $\frac{kC'_{n,k}}{n}$. Quindi si ha la seguente identità:

$$\frac{kC'_{n,k}}{n} = \frac{(k-1)C'_{n,k-1}}{n} + C'_{n,k-1},$$

ovvero,

$$kC'_{n,k} = (k-1)C'_{n,k-1} + nC'_{n,k-1}.$$

Da questa si deduce che

$$C'_{n,k} = \frac{n+k-1}{k}\,C'_{n,k-1},$$

ed analogamente, diminuendo il k di un' unità per volta, si ha

$$C'_{n,k-1} = \frac{n+k-2}{k-1} C'_{n,k-2} ,$$

. . . .

$$C'_{n,2} = \frac{n+1}{2} C'_{n,1} = \frac{n+1}{2} \times n ,$$

e moltiplicando fra loro membro a membro tutte queste uguaglianze si ha:

$$C'_{n,k} = \frac{n(n+1)(n+2) + \ldots + (n+k-1)}{k!} =$$

$$= \binom{n+k-1}{k} = C_{n+k-1,k} .$$

Cioè: *il numero delle combinazioni con ripetizioni di* n *elementi a* k *a* k *è uguale al numero delle combinazioni semplici di* n + k − 1 *elementi a* k *a* k.

Un prodotto di k fattori interi consecutivi crescenti a cominciare da n si suole esprimere con $n^{\overline{k}}$ e si chiama *potenza fattoriale*. Perciò si può scrivere

$$C'_{n,k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} .$$

2.° MODO. Sian formate le combinazioni con ripetizioni di n oggetti a $k-1$ a $k-1$ (per esempio le combinazioni di 4 lettere a, b, c, d a tre a tre); se a ciascuna di esse (per esempio *aad* aggiungiamo una per volta gli n oggetti dati, e ripetiamo l'aggiunzione per i $k-1$ oggetti che la costituiscono, avremo altrettante combinazioni con ripetizioni di n oggetti a k a k cioè $n+k-1$.

Però le combinazioni che si ottengono, che sono:

$$C'_{n,k-1} \times (n+k-1) ,$$

non sono tutte distinte ed ognuna troverassi ripetuta tante

volte quanti sono gli oggetti che la compongono, cioè k volte. (Per esempio; $aacd$ si ottiene da aac aggiungendo d; da aad aggiungendo c; da acd aggiungendo a come elemento distinto; e da acd aggiungendo a come lettera che contiene).

Quindi si ha

$$C'_{n,k} = \frac{n+k-1}{k} C'_{n,k-1},$$

e così, come abbiamo fatto nel primo modo, possiamo trovare che

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

26. Applicazione. **Problema di Tartaglia.**

Gettando k *dadi da gioco ripetutamente sopra un tavolo quanti sono i casi possibili e distinti che si possono effettuare?*

Le facce dei dadi da gioco portano i numeri da 1 a 6, e quindi i sei numeri si possono combinare in tanti modi quante sono le combinazioni con ripetizione di 6 oggetti a k a k, cioè

$$C'_{6,k} = \binom{6+k-1}{k} \text{ *)}.$$

Si osservi però che se si voglia la restrizione che i casi siano distinti, e si pone il problema chiedendo: *Quanti sono i casi possibili che si possono avere gettando ripetutamente* k *dadi su un tavolo?* il numero cambia; poiché una determinata combinazione (p. es. la combinazione 1222...2 si può presentare non una volta sola, ma quante sono le possibili permutazioni che con essa si possono fare). Perciò il numero dei casi possibili e non distinti sono tanti quante sono le disposizioni con ripetizione di 6 numeri a k a k, e quindi $= 6^k$, cioè alla potenza k^{ma} di 6.

---

*) Questa questione fu la prima volta risoluta da Tartaglia nel 1523 e pubblicata a p. 17 della Parte II del suo *General trattato dei numeri et misure.* Egli ci perveniva con un ragionamento che si può riassumere nella formola dell'applicazione 2ª del n. **22**.

§ 4. — Prodotto di n fattori binomii e potenza n^{ma} del binomio con n intero e positivo.

27. Sia da eseguire il seguente prodotto di n fattori binomii di primo grado

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_{n-1})(x+a_n)\ .$$

Il prodotto sarà un polinomio di grado n^{mo}, che si può scrivere direttamente senza bisogno di eseguire le singole moltiplicazioni, purché si tenga presente che ogni termine del prodotto deve contenere come fattore un termine di ciascun binomio.

Ed infatti, il termine di più alta potenza del prodotto, quello di grado n^{mo}, può risultare soltanto col moltiplicare fra loro tutti i primi termini dei binomii e quindi esso è x^n. Un termine di grado $n-1$ del prodotto si ottiene moltiplicando il secondo termine di uno dei binomii per i primi termini di tutti i rimanenti binomii; quindi tutti i possibili termini di grado $n-1$ del prodotto sono:

$$a_1x^{n-1}\,,\ a_2x^{n-1}\,,\ a_3x^{n-1}\,,\ldots,\ a_nx^{n-1}\ ,$$

e ponendo x^{n-1} in evidenza risulta un termine solo di grado $n-1$,

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n)x^{n-1}\ ,$$

il cui coefficiente è la somma di tutti i secondi termini dei binomii, e che si può scrivere brevemente

$$\left(\sum_{1}^{n}{}_i\, a_i\right)x^{n-1}\ .$$

Un termine di grado $n-2$ del prodotto si ottiene moltiplicando i secondi termini di due binomii per i primi termini di tutti i rimanenti binomii; quindi tutti i possibili termini di grado $n-2$ del prodotto sono:

$$a_1a_2x^{n-2}\,,\ a_1a_3x^{n-2}\,,\ldots,\ a_2a_3x^{n-2}\,,\ a_2a_4x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}a_nx^{n-2},$$

e ponendo x^{n-2} in evidenza risulta un termine solo di grado $n-2$,

$$(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_2 a_3 + a_2 a_4 + \ldots + a_{n-1} a_n) x^{n-2} ,$$

il cui coefficiente è la somma dei prodotti a due a due di tutti i secondi termini dei binomii, e che si può scrivere brevemente

$$\left(\sum_{1\,ij}^{n} a_i a_j\right) x^{n-2} .$$

Così seguitando, il termine di grado $n-3$ del prodotto avrà per coefficiente la somma dei prodotti che si ottengono combinando a tre a tre tutti i secondi termini dei binomii, e si può scrivere brevemente

$$\left(\sum_{2\,ijh}^{n} a_i a_j a_h\right) x^{n-3} ;$$

il termine di grado $n-k$ avrà per coefficiente la somma di tutti i prodotti che si ottengono combinando a k a k tutti i secondi termini e si può scrivere

$$\left(\sum_{1\,ijh\ldots l}^{n} a_i a_j a_h \ldots a_l\right) x^{n-k} ;$$

ecc.; l'ultimo termine, quello di grado zero, risulta dal prodotto di tutti i secondi termini dei binomii fra loro ed è

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n .$$

Risulta dunque che:

$$\left.\begin{aligned} &(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_{n-1})(x+a_n) = \\ &= x^n + \left(\sum_{1\,i}^{n} a_i\right) x^{n-1} + \left(\sum_{1\,ij}^{n} a_i a_j\right) x^{n-2} + \left(\sum_{1\,ijh}^{n} a_i a_j a_h\right) x^{n-3} + \ldots \\ &+ \left(\sum_{1\,ijh\ldots l}^{n} a_i a_j a_h \ldots a_l\right) x^{n-k} + \ldots + a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n . \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ESEMPIO:

$$(x-5)(x+3)(x+4)(x-2)=x^4+0x^3+(-27)x^2+(-14)x+120$$
$$=x^4-27x^2-14x+120 \; .$$

28. POTENZA n^{ma} DEL BINOMIO. Poniamo nella formola (1) del n. precedente

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = a \; ,$$

il prodotto diventa la potenza $(x+a)^n$, e ogni coefficiente dello sviluppo (eccetto il primo e l'ultimo) diventa somma di termini eguali fra loro, di cui il numero è noto, essendo eguale a quello delle combinazioni di n elementi ad 1 ad 1, a 2 a 2, a 3 a 3, ..., a k a k, ..., a $(n-1)$ a $(n-1)$.

Ma il primo coefficiente è 1 e si può scrivere $\binom{n}{0}$, l'ultimo termine è a^n e si può scrivere $\binom{n}{n}a^n$; dunque si ha immediatamente la formola seguente per lo sviluppo della potenza n^{ma} del binomio (per n intero e positivo)

$$\left.\begin{aligned}(x+a)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}ax^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\binom{n}{3}a^3x^{n-3}+\ldots\\ +\binom{n}{k}a^kx^{n-k}+\ldots+\binom{n}{n}a^n=\sum_{0}^{n}{}_k\binom{n}{k}a^kx^{n-k} \; .\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

È per questo che i numeri $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ si dicono *coefficienti binomiali* del numero n.

Quindi: *Lo sviluppo della potenza* n^{ma} *dei binomii* $x + a$, *per* n *intero e positivo, è un polinomio in* a *ed in* x *di grado* n, *completo, ordinato, omogeneo, del quale gli* $n+1$ *termini hanno per coefficienti rispettivamente*

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n} .$$

I coefficienti egualmente distanti dai termini estremi sono eguali fra loro.

Se n *è pari il numero dei termini è dispari e vi è un*

sol termine medio; se n *è dispari il numero dei termini è pari e vi sono due termini medii di eguali coefficienti.*

Ogni coefficiente si ottiene da quello del termine precedente moltiplicandolo per la potenza di x *di questo termine precedente e dividendolo pel numero che indica il posto dello stesso termine (cioè per l' esponente di* a *aumentato di un'unità).*

29. Esempii.

$$(x+a)^5=x^4+4ax^3+6a^2x^3+4a^3x+a^4\ ,$$
$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5\ ,$$
$$(x+a)^6=x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6\ ,$$

Se praticamente si deve formar lo sviluppo di una potenza di $x+a$, e per fissare le idee supponiamo che si voglia quello della 21ma potenza di $x+a$, si scriveranno i primi due termini x^{21}, $21ax^{20}$, indi per avere il coefficiente del terzo termine si moltiplicherà 21 per l'esponente 20 di x e si dividerà il prodotto per 2 *), e si potrà così scrivere il terzo termine $210a^2x^{19}$; per avere il coefficiente del quarto termine si moltiplicherà 210 per 19 e si dividerà il prodotto per 3 **) e si potrà così scrivere il quarto termine che è $1330a^3x^{18}$; e così via; quindi:

$$\begin{aligned}(x+a)^{21}=x^{21}&+21ax^{20}+210a^2x^{19}+1330a^3x^{18}+5985a^4x^{17}\\&+20349a^5x^{16}+54264a^6x^{15}+116280a^7x^{14}+203490a^8x^{13}\\&+293930a^9x^{12}+352716a^{10}x^{11}+\ldots+21a^{20}x+a^{21}\ .\end{aligned}$$

30. Mutando a in $-a$ nella formola (2) si ha immediatamente:

$$\left.\begin{aligned}(x-a)^n=&\binom{n}{0}x^n-\binom{n}{1}ax^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}-\binom{n}{3}a^3x^{n-3}+\ldots\\&+(-1)^k\binom{n}{k}a^kx^{n-k}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}a^n=\sum_{0}^{n}{}_k(-1)^k\binom{n}{k}a^kx^{n-k}.\end{aligned}\right\}(3)$$

Se n è pari l'ultimo termine è positivo; se n è dispari esso è negativo.

---

*) Praticamente si moltiplica 21 per $^{20}/_2$, cioè per 10.

**) Praticamente si moltiplica $^{210}/_3$ per 19, cioè 70 per 19.

31. Se nelle formole (2) e (3) si pone $x = 1$, $a = 1$, tutti i monomii, fatta astrazione dai coefficienti, divengono eguali all'unità e si ha:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots\dots + (-1)^n \binom{n}{n} .$$

Da ciò si deduce che:

1.° *La somma dei coefficienti binomiali del numero* n *è uguale all'*n^{ma} *potenza di* 2.

2.° *La somma dei coefficienti binomiali di posto dispari del numero* n *è eguale alla somma dei coefficienti binomiali di posto pari.*

Il primo di questi teoremi dà la somma dei numeri del triangolo di Tartaglia contenuti in ogni sua orizzontale.

Un'altra proprietà notevole di questo triangolo è che se si sommano in esso i numeri che stanno allineati col primo di ogni linea orizzontale e col secondo della orizzontale precedente si hanno successivamente i numeri

$$1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , \dots$$

della serie detta di Fibonacci *), di cui ogni termine è la somma dei due termini precedenti.

32. Applicazioni.

1.ª *Trovare il 15° termine dello sviluppo di* $(3a + 5b)^{21}$.

Il coefficiente di questo termine è

$$\binom{21}{14} = \binom{21}{7} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 19 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 8 \cdot 15 ,$$

i suoi fattori sono $(3a)^7$, $(5b)^{14}$; quindi il termine cercato è

$$2^3 \cdot 3^9 \cdot 5^{15} \cdot 17 \cdot 19 \cdot a^7 \cdot b^{14} .$$

---

*) Leonardo Fibonacci da Pisa, nato verso il 1170, nell'opera *Liber Abaci* da lui pubblicata il 1202, fece nota questa serie, a proposito di un problema detto della conigliera, col quale si proponeva di sapere quante coppie di conigli si troverebbero alla fine di ogni mese in una conigliera ove sia posta una sola coppia di conigli, e nell'ipotesi che ogni coppia alla fine di ogni mese generi un'altra coppia, che a sua volta abbia la stessa produttività.

2.ª *Trovare la somma* s_k *delle* k^{me} *potenze dei numeri naturali da* 1 *ad* n,

$$s_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k \, .$$

Dalla formola (2) si ha

$$(x+1)^{k+1} = x^{k+1} + \binom{k+1}{1} x^k + \binom{k+1}{2} x^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k} x + \binom{k+1}{k+1} .$$

In questa formola si ponga una volta $x=0$, poi $x=1, 2, 3, \ldots, n$, si avranno successivamente le identità:

$$1^{k+1} = 1$$

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + \binom{k+1}{1} 1^k + \binom{k+1}{2} 1^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k} 1 + 1$$

$$3^{k+1} = 2^{k+1} + \binom{k+1}{1} 2^k + \binom{k+1}{2} 2^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{2} 2 + 1$$

. . . .

. . . .

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k} n + 1$$

Sommando queste identità, ponendo in vista i coefficienti binomiali, e sopprimendo i termini comuni a' due membri, si ha

$$(n+1)^{k+1} = \binom{k+1}{1} s_k + \binom{k+1}{2} s_{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k} s_1 + (n+1) \, ,$$

da cui si deduce che l'incognita s_k è data da

$$s_k = \frac{(n+1)^{k+1} - (n+1) - \binom{k+1}{k} s_1 - \binom{k+1}{k-1} s_2 - \ldots - \binom{k+1}{2} s_{k-1}}{k+1} .$$

Questa formola è detta ricorrente, perché per trovare il valore di s_k occorre conoscere i valori di $s_{k-1}, s_{k-2}, \ldots, s_1$ *).

---

*) Si vegga *Aritm. part. e gen.* (Cap. VI, 17, 8°. p. 428 della 3ª ed.) per una formola riguardante il limite di $\frac{s_k}{n^{k+1}}$; oppure *Aritm. ed Alg.*, Cap. XVI, 17, 8°.

Se invece di partire dallo sviluppo di $(x+1)^{k+1}$, si parte dallo sviluppo di $(x+d)^{k+1}$ si ottiene una formola che dà la somma delle k^{esime} potenze dei termini di una progressione aritmetica di ragione d.

Ponendo nella (4) $k=1$, si ha

$$s_1 = \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} ;$$

per $k=2$ si ha

$$s_2 = \frac{(n+1)^3-(n+1)-\frac{3(n+1)n}{2}}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)\{2(n+1)^2-2-3n\}}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ *)}$$

per $k=3$, si ha

$$s_3 = \frac{(n+1)^4-(n+1)-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)}{4} =$$

$$= \frac{n+1}{4}\{(n+1)^3-1-n(2n+1)-2n\} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = s_1^{\,2} ,$$

per $k=4$, 5, 6 si ha:

$$s_4 = \frac{(n+1)^5-(n+1)-5s_1-10s_2-10s_3}{5} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$s_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$s_6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42} .$$

Dal valore di s_3 si deduce che:

La somma dei cubi dei numeri interi da 1 *ad* n *è eguale al quadrato della somma dei numeri interi da* 1 *a* n **).

---

*) Cfr. *Ar. p.* e *g.*, Cap. V, **18**, p. 298, 3ª ed.; oppure *Aritm. ed Alg.* Cap. X, **18**.

) Cfr. *Ar. p.* e *g.*, p. 462, 3ª ed., VII, **31, 5ª; oppure *Ar. ed Alg.*, p. 663, XVII, **31**, 5ª.

3.ª SOMME DI POTENZE FATTORIALI. Ricordiamo che dicesi *potenza fattoriale* m^{ma} *del numero* k il prodotto di m fattori interi crescenti consecutivi a cominciare da k e che essa si esprime con $k^{\overline{m}}$ (cfr. n. **25**); cosicchè

$$k^{\overline{m}} = k(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1) = \mathrm{D}_{k+m-1,k}\,.$$

Vogliamo qui cercare il valore della somma

$$1^{\overline{m}} + 1^{\overline{m}} + 3^{\overline{m}} + \ldots + n^{\overline{m}}\,.$$

Indichiamo questa somma con S, e dividiamola per $m!$ si avrà

$$\frac{\mathrm{S}}{m!} = \frac{1^{\overline{m}}}{m!} + \frac{2^{\overline{m}}}{m!} + \frac{3^{\overline{m}}}{m!} + \ldots + \frac{n^{\overline{m}}}{m!}$$

$$= \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \ldots + \binom{m+n-1}{m}$$

e per la formola dei *numeri figurati* (cfr. n. **22**) $= \binom{m+n}{m+1}$.

Quindi

$$\mathrm{S} = \binom{m+n}{m+1} m! = \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\ldots(n+1)n}{m+1} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}\,.$$

Così, per es.:

$$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + 4\cdot5 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,;$$

$$1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

4.ª Alla formola precedente e ad altre più generali di essa si giunge applicando la formola del valore di s_k.

Se si voglia p. es. trovare la somma di

$$1\cdot3 + 2\cdot4 + 3\cdot5 + \ldots + n(n+2)\,,$$

basta osservare che essa si può scrivere

$$\sum_1^n{}_h k(k+2) = \sum_1^n{}_k k^2 + 2\sum_1^n{}_k k = s_2 + 2s_1 = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}\,.$$

Se si voglia trovare la sommn di

$$1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+\ldots+(2n-1)(2n+1)\ ,$$

basta osservare che essa si può scrivere

$$\sum_{1}^{n}{}_{k}(2k-1)(2k+1)=\sum_{1}^{n}{}_{k}4k^2-\sum_{1}^{n}1=4s_2-n=n\cdot\frac{4n^2+6n-1}{3}\ .$$

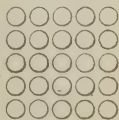
5.ª NUMERO DELLE PALLE CHE OCCORRONO PER FORMARE LE PILE.

Probl. 1.º Supponiamo che la pila sia triangolare, cioè abbia la sua base formata come la figura qui affianco, e che gli strati successivi siano triangoli con una palla di meno per ogni lato. Se n è il numero delle palle di un lato della base, nello strato della base vi sono $1+2+3+\ldots+n$ palle, cioè $\frac{n(n+1)}{2}$; negli strati seguenti le palle sono date dalle somme da 1 ad $n-1$, da 1 a $n-2$, ed in ultimo ve ne sarà una sola.

Quindi la somma delle palle della pila triangolare è data da

$$\sum_{1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{1}^{n}n^2+\sum_{1}^{n}n\right)=\frac{1}{2}(s_2+s_1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot3}=\binom{n+2}{3}$$

e da ciò questi numeri sono detti *tetraedrici*.

Probl. 2.º Supponiamo che la pila sia quadrata, cioè abbia la sua base formata come la figura qui affianco, e che gli strati successivi, siano quadrati con una palla di meno per lato.

Se n è il numero delle palle di un lato della base, nello strato della base vi sono n^2 palle, nello strato superiore ve ne sono $(n-1)^2$, poi $(n-2)^2$, ecc., poi 1 sola, e sommando si ha:

$$\sum_{1}^{n}n^2=s_2\ .$$

Probl. 3.º Supponiamo che la pila sia rettangolare, che abbia cioè per base un rettangolo di palle che contenga n palle in un lato ed $n+p$ palle nell'altro. Le palle della base sono dunque:

$$n(n+p)=n^2+np\ .$$

Quelle dello strato superiore sono

$$(n-1)(n-1+p)=(n-1)^2+(n-1)p \ ,$$

eppoi più su

$$(n-2)(n-2+p)=(n-2)^2+(n-2)p$$

. . . .

ed infine

$$1(1+p)=1^2+1p \ .$$

Sommando si ha che il numero delle palle della pila è dato da

$$\sum_1^n n(n+p)=s_2+ps_1 \ .$$

6.ª NUMERI POLIGONALI. Supponiamo che ad un poligono di p lati si sovrappongono altri poligoni simili ad esso, in modo che risultino ad avere un angolo comune e i rimanenti lati omologhi paralleli, e supponiamo inoltre che i lati di questi poligoni simili stiano fra loro come i numeri $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$. Supponiamo infine che in ciascuno dei vertici di ognuno di essi si ponga una palla; che sui lati del secondo si metta inoltre una palla in mezzo ad ogni lato che ne manca, sui lati del terzo se ne mettano due, e così seguitando. Si avrà una figura, nella quale a cominciare dal vertice comune si trova prima una palla, poi in giro se ne trovano $1+p-2, 1+2(p-2), \ldots,$ e sull'$(n-2)^{mo}$ poligono se ne troveranno altri $1+(n-1)(p-2)$, sicché in tutto il numero è dato dalla somma di

$$1, 1+(p-2), 1+2(p-2), 1+3(p-2), \ldots, 1+(n-1)(p-2) \ ,$$

che si può mettere sotto la forma seguente:

$$n+\binom{n}{2}(p-2) \ .$$

Questo numero, che riguarda un poligono di p lati su ognuno dei quali si trovano n palle, si dice n^{esimo} *numero poligonale di* p *vertici.*

Per $p=3$ si ha l'n^{mo} *numero triangolare.*

$$n+\binom{n}{2}=s_1 \ ;$$

per $p=4$, si ha l'n^{mo} *numero quadrato*

$$n+\binom{n}{2}2=n+n(n-1)=n^2\ ;$$

per $p=5$, si ha l'n^{mo} *numero pentagonale*

$$n+\binom{n}{2}3=n+\frac{3}{2}(n^2-n)=\frac{3n^2-n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}\ ;\ \text{ecc.}$$

§ 5. — Potenza intera e positiva di un polinomio.

33. Vogliamo cercare lo sviluppo della potenza n^{ma} del polinomio $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_p$ di p termini, cioè lo sviluppo di
$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_p)^n\ .$$

Invece di usare la moltiplicazione di p polinomii eguali al polinomio dato, perverremo al risultato cercato con un ragionamento rapido analogo a quello usato nel n. **27**. Il polinomio cercato deve essere di grado n ed omogeneo, quindi per ogni suo termine deve avere la forma

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\ldots x_p^{\alpha_p}\ ,$$

con la condizione che sia

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_p=n\ .$$

Ogni prodotto $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\ldots x_p^{\alpha_p}$ può considerarsi come una combinazione con ripetizione dei p termini del polinomio dato ad n ad n, dove x_1 è ripetuto α_1 volte, x_2 è ripetuto α_2 volte, ecc.; quindi il numero dei *termini non simili* dello sviluppo della potenza n^{ma} del polinomio di p termini è eguale al numero delle combinazioni con ripetizione di p oggetti ad n ad n, cioè $C'_{p,n}=\binom{p+n-1}{n}$.

Occorre però vedere quante volte si può presentare uno stesso termine per sapere il coefficiente che gli spetta nello sviluppo.

Il termine x_1 dovendo essere preso in α_1 polinomii diversi può essere preso in tanti modi quante sono le com-

binazioni di n oggetti ad α_1 ad α_1, cioè in $\binom{n}{\alpha_1}$ modi diversi. Fissata una di queste combinazioni, il termine x_2 deve essere preso dai rimanenti $n-\alpha_1$ polinomii α_2 volte, quindi può essere preso in tanti modi diversi quante ne rappresenta il numero $\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}$, e perciò il prodotto $\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}$ rappresenta in quanti modi diversi si può fare la scelta di α_1 termini x_1 ed α_2 termini x_2. Fissato uno di questi modi, il termine x_3 si può prendere α_3 volte dai rimanenti $(n-\alpha_1-\alpha_2)$ polinomi in $\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}$ modi diversi, ecc. ecc.; in fine x_p si può prendere α_p volte in

$$\binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{p-1}}{\alpha_p}$$

modi diversi, ma $n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{p-1}=\alpha_p$, dunque gli α_p x_p si possono prendere in un modo solo.

Si ha dunque che il coefficiente del prodotto $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\ldots x_p^{\alpha_p}$ nello sviluppo cercato è

$$\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\binom{n-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_3}\ldots\binom{n-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{p-1}}{\alpha_p}=$$

$$=\frac{n!}{\alpha_1!(n-\alpha_1)!}\cdot\frac{(n-\alpha_1)!}{\alpha_2!(n-\alpha_1-\alpha_2)!}\cdot\frac{(n-\alpha_1-\alpha_2)!}{\alpha_3!(n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)!}\cdots\frac{(n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{p-1})!}{\alpha_p!}$$

$$=\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_p!}.$$

Si può dunque conchiudere

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_p)^n=\sum\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\ldots\alpha_p!}x_1^{\alpha_2}\,x_2^{\alpha_2}\,x_3^{\alpha_3}\ldots x_p^{\alpha_p}$$

per

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_p=n.$$

Per $m=2$ questa formola si riduce a

$$(x_1+x_2)^n=\sum\frac{n!}{\alpha_1!(n-\alpha_1)!}x_1^{\alpha_1}\,x_2^{n-\alpha_1}$$

che coincide con la formola del binomio già data nel n. **28**.

34. Ogni funzione omogenea completa di grado n delle variabili $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ ha, con coefficienti numerici differenti, gli stessi termini della potenza n^{ma} del polinomio $(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p)$; quindi si conchiude che:

Il numero dei termini non simili di una funzione intera omogenea completa di grado n *di* p *variabili è eguale a* $C'_{p,n} = \binom{p+n-1}{n}$.

Una funzione non omogenea di grado n e di p variabili può considerarsi come funzione omogenea, se ogni termine si suppone aumentato di un fattore rappresentato da una potenza di 1 atta a far elevare il termine al grado n^{mo}. Quindi si deduce che:

Il numero dei termini distinti di una funzione intera non omogenea completa di grado n *e di* p *variabili è eguale al numero dei termini di una funzione omogenea completa di grado* n *e di* p + 1 *variabili,* e quindi $= \binom{p+n}{n}$.

Invece una funzione intera non omogenea di grado p e e di n variabili ha $\binom{n+p}{p}$ termini distinti. Quindi se ne deduce che:

Il numero dei termini di una funzione intera non omogenea completa di grado n *e di* p *variabili è eguale al numero dei termini di una funzione intera non omogenea completa di grado* p *e di* n *variabili.*

35. Per eseguire praticamente lo sviluppo della potenza n^{ma} di un polinomio di p termini occorre saper scomporre il numero n in somme di p numeri in tutti i modi possibili. Quest' operazione si chiama *partizione del numero* n.

Così, per esempio, se si vuole sviluppare $(a + b + c + d)^5$, occorre partire il numero 5 in somme di 4 termini. Facilmente si vede che si hanno le seguenli partizioni

0005 0014 0113 1112 ,
0023 0122

quindi si ha:

$$(a+b+c+d)^5=\Sigma a^5+\frac{5!}{1!\,4!}\Sigma ab^4+\frac{5!}{2!\,3!}\Sigma a^2b^3+\frac{5!}{1!\,1!\,3!}\Sigma abc^3+$$
$$+\frac{5!}{1!\,2!\,2!}\Sigma ab^2c^2+\frac{5!}{1!\,1!\,1!\,2!}\Sigma abcd^2$$
$$=\Sigma a^5+5\Sigma ab^4+10\Sigma a^2b^3+20\Sigma abc^3+30\Sigma ab^2c^2+60\Sigma abcd^2$$
$$=a^5+b^5+c^5+5(ab^4+ac^4+ad^4+ba^4+bc^4+bd^4+ca^4+cb^4+cd^4$$
$$+da^4+db^4+db^4)$$
$$+10(a^2b^3+a^2c^3+a^2d^3+b^2a^3+b^2c^3+b^2d^3+c^2a^3+c^2b^3+c^2d^3+d^2a^3$$
$$+d^2b^3+d^2c^3)$$
$$+20(abc^3+abd^3+acb^3+acd^3+adb^3+adc^3+bca^3+bcd^3+bda^3+bdc^3$$
$$+cda^3+cdb^3)$$
$$+30(ab^2c^2+ab^2d^2+ac^2d^2+ba^2c^2+ba^2d^2+bc^2d^2+ca^2b^2+ca^2d^2+cb^2d^2$$
$$+da^2b^2+da^2c^2+db^2c^2)$$
$$+60(abcd^2+abdc^2+adcb^2+bcda^2).$$

Se invece si vuole lo sviluppo di $(a+b+c)^5$ si trova più facilmente:

$$(a+b+c)^5=\Sigma a^5+5\Sigma ab^4+10\Sigma a^2b^3+20\Sigma abc^3+30\Sigma ab^2c^2$$
$$=a^5+b^5+c^5+5(ab^4+ac^4+ba^4+bc^4+ca^4+cb^4)$$
$$+10(a^2b^3+a^2c^3+b^2a^3+b^2c^3+c^2a^3+c^2b^3)$$
$$+20(abc^3+acb^3+bca^3)$$
$$+30(ab^2c^2+bc^2a^2+ca^2b^2).$$

In particolare per $(a+b+c+d+...)^2$ si ritrova la formola

$$(a+b+c+\ldots)^2=\Sigma a^2+2\Sigma ab\ ;$$

e per $(a+b+c)^3$ si ritrova la formola

$$(a+b+c)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6abc$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc\ .$$

(cfr. *Aritm. partic. e gen.*, 3ª ed.; oppure *Aritm. ed Alg.*, III, n.i **52** e **55**) *).

---

*) Il primo trattato sulle combinazioni fu scritto da Blaise Pascal nel 1654 ed è intitolato *Traité du triangle arithmétique* (*Oeuvres*, Paris, 1880), ed

§ 6. — Cenni sulle probabilità.

36. Il giuoco dei dadi e la ricerca del modo di ripartire equamente la somma impostata fra due giocatori, che non hanno terminata la partita del gioco *), han fatto nascere la teoria della probabilità matematica, detta semplicemente *probabilità*.

La probabilità si distingue in *a priori* ed *a posteriori*,

---

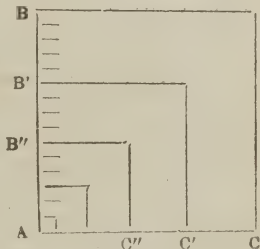
esso fu presto seguìto da' lavori di G. W. Leibniz (1666), di J. Wallis (1685), di B. Frénicle (1693), di Jakob Bernoulli (1713), di A. de Moivre (1718). La notazione $n!$ è di Chr. Kramp (1808). La notazione $\binom{n}{p}$ è stata introdotta da I. L. Raabe nel 1851, mentre Euler aveva usata $\left(\frac{n}{p}\right)$. Il nome di *inversione* fu introdotto da J. D. Gergonne nel 1813.

Lo sviluppo di $(a+b)^n$, sebbene porti il nome di I. Newton, era già dato dal cinese Tschu Schi Kih nel 1303, da Stifel nel 1544, ed applicato da Tartaglia nel 1556 all'estrazione delle radici n^{esime}; Newton invece ha avuto il merito di aver estesa nel 1676 la formola stessa al caso di un esponente frazionario $\frac{m}{n}$ positivo o negativo (nelle *Lettere* a Oldenburg). La formola dello sviluppo del polinomio si riattacca ad un'osservazione di Leibniz in una lettera a Johann Bernoulli nel 1695, ma fu pubblicata la prima volta da de Moivre verso il 1697.

Per la formola $s_3 = s_1^2$ è utile far conoscere una dimostrazione diretta trovata da non molti anni in un' opera del matematico arabo Alkarchi, vissuto verso il 1010 d. C.

Sia ABC il quadrato che ha per lato la somma dei numeri da 1 ad n, ed AB'C' il quadrato che ha per lato la somma dei numori da 1 ad $n-1$, si ha: $AB^2 = (AB' + B'B)^2 = AB'^2 + 2 \cdot AB' \cdot B'B + B'B^2$ e quindi

$$AB^2 - AB'^2 = 2 . AB' . B'B + B'B^2 =$$

$$= 2n . \sum_1^{n-1} n + n^2 = n^2(n-1) + n^2 = n^3 .$$

Dunque lo gnomone $B'BCC'B' = n^3$, parimenti lo gnomone

$$B''B'C'C''B'' = (n-1)^3, \text{ ecc.};$$

perciò $$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2 .$$

*) Questo problema fu posto la prima volta da Luca Paciolo (*Summa de Aritmetica* ecc., Venezia, 1494, fol. 197) e malamente risoluto. Fu risoluto la prima volta da Pascal e da Fermat nel 1654, e poi da Huygens e Jakob Bernoulli.

in *probabilità totale*, *probabilità composta*, *probabilità geometrica*, e dà luogo alla *speranza matematica*, alla *speranza morale* e ad altre teorie sulla media degli errori nelle scienze di osservazione, sulle assicurazioni della vita e degli infortunii, ecc.

Avvenimento *incerto* è quello la cui effettuazione non risulta con certezza dalle condizioni conosciute o assegnate, ma per essa si può solo esprimere un grado più o meno elevato di possibilità. Il calcolo delle probabilità ha per oggetto lo studio della frequenza relativa degli avvenimenti incerti. Se gli avvenimenti sono dei fatti teorici o matematici, per i quali la misura della probabilità risulta da una definizione, si ha la probabilità *a priori*; se sono invece dei fatti fisici o sociali per i quali l'osservazione e la statistica devon servire di guida o si cerchi la probabilità delle cause dedotta dall'osservazione, si ha la probabilità *a posteriori*. Se l'avvenimento dipende da una o più variabili continue, sicchè i casi possibili sono innumerevoli, si ha la probabilità *geometrica*.

Un esempio della probabilità *a priori* si ha nell'avvenimento di far sei punti gettando due dadi sul tavolo; un esempio di probabilità *a posteriori* si ha nella possibilità o non che una persona di 30 anni possa raggiungere l'età di 60 anni, o che un avvenimento, che era possibile separatamente per diverse cause indipendenti fra loro, sia avvenuto solo per una determinata di esse; un esempio di probabilità *geometrica* si ha nella possibilità che un ago, di lunghezza a o una moneta di diametro a, gettati su un tracciato di rette parallele equidistanti fra loro per un segmento $b > a$ incontri una delle linee (problema di Buffon *), oppure che quattro punti presi a caso in una figura geometrica formino un quadrilatero convesso (problema di Sylvester) **).

La teoria della probabilità si fonda sopra un piccol numero di principii che esporremo man mano che occorre; ed i problemi che essa studia possono raggiungere difficoltà

---

*) *Essai d'Arithmétique morale*, scritta verso il 1760.

**) *Encyclopaedia britannica* (9ª ed.) Edimburgo, 1885.

tali che per risolverle occorrono le alte teorie matematiche; per la qualcosa qui ci limiteremo ad esporre soltanto alcuni di quelli problemi che sono assolutamente elementari.

37. PROBABILITÀ A PRIORI. Allorquando un medesimo avvenimento che ha luogo n volte può ripetersi f volte nel modo desiderato (caso favorevole), e c volte nel modo contrario (caso contrario), e tutti i casi sono *egualmente possibili* (si tenga ben mente a questo), dicesi *probabilità favorevole* il rapporto $p = \frac{f}{f+c} = \frac{f}{n}$ e *probabilità contraria* il rapporto $q = \frac{c}{f+c} = \frac{c}{n}$.

Se $f = 0$, si ha l'*impossibilità* del caso favorevole, ed essa è definita da $p = 0$; se $c = 0$ si ha la *certezza* del caso favorevole, ed essa è definita da $p = 1$. Secondo che la probabilità risulti $<$ $=$ o $>$ di $^1/_2$ si dice che l'avvenimento è *inverosimile, incerto* o *verosimile.*

In ogni caso la somma della probabilità favorevole e della probabilità contraria è eguale ad 1, sicché

$$p = 1 - q \; .$$

38. ESEMPIO. *Vi è più probabilità a vincere con tre dadi sul numero 4 o sul numero 10?* *) La somma 4 può risultare qualora i dadi presentino rispettivamente i numeri 1, 1, 2, oppure 1, 2, 1, oppure 2, 1, 1, quindi si hanno 3 casi favorevoli su 6^3 casi possibili; mentre la somma 10 può presentarsi 6 volte con le permutazioni di 6, 3, 1; 3 volte con le permutazioni di 6, 2, 2; 6 volte con le permutazioni di 5, 4, 1 o di 5, 3, 2; 3 volte con le permutazioni di 4, 4, 2, o di 4, 3, 3; quindi in tutto 27 volte. Perciò la probabilità di vincere col numero 10 è $\frac{27}{6^3}$; mentre quella di vincere sul numero 4 è appena di $\frac{3}{6^3}$.

*) Galileo Galilei (*Considerazioni sopra il giuoco dei dadi,* scritte prima del 1642. *Opere*, v. 8, Firenze, 1898, p. 591-4).

39. Probabilità totale. Quando un avvenimento si può produrre in più modi differenti, ma tali che due di essi non possono prodursi simultaneamente, dicesi *probabilità totale* la probabilità dell'avverarsi dell'avvenimento in uno qualunque dei modi considerati. Così se l'avvenimento A ha n casi possibili, e di questi f_1 casi possono avverarsi nella forma A_1, f_2 casi nella forma $A_2, \ldots, f_i$ casi nella forma A_i, e due qualunque di queste forme non possono avvenire simultaneamente, e se si cerca che l'avvenimento abbia luogo indifferentemente sotto una qualunque delle forme $f_1, f_2, \ldots, f_i$, i casi possibili saranno

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_i$$

e quindi la probabilità totale è

$$p = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_i}{n}.$$

Ma questa è eguale a

$$\frac{f_1}{n} + \frac{f_2}{n} + \cdots + \frac{f_i}{n} = p_1 + p_2 + \cdots + p_i\,;$$

dunque:

La probabilità totale è la somma delle probabilità favorevoli ai singoli casi.

Esempii. 1.° *In un un'urna vi sono 6 palline bianche, 7 rosse, 11 verdi, ed altre 16 di colori differenti da questi; qual'è la probabilità che una pallina estratta sia bianca o rossa o verde?*

In base al principio della *probabilità totale* la probabilità cercata p sarà $= \frac{6+7+11}{40} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$.

2.° *In un'urna vi sono i numeri da 1 a 90, qual'è la probabilità che tra 5 numeri estratti ve ne siano 3 assegnati prima?*

I cinque numeri estratti possono presentarsi in $\binom{90}{5}$ modi differenti, questi sono dunque i casi possibili. I casi favorevoli sono che, sui cinque numeri, tre siano i dati, e gli altri due siano fra i rimanenti 90 — 3 numeri, e ciò può avvenire in $\binom{90-3}{2}$ modi. Dunque la probabilità richiesta è $\binom{87}{2} : \binom{90}{5} = \frac{1}{11748}$.

In generale: *se i numeri sono* m, *e si cerca la probabilità che fra* n *estratti ve ne siano* p *assegnati prima,* si avrà per la probabilità cercata

$$\binom{m-p}{n-p} : \binom{m}{n} .$$

3.° *La probabilità di fare con 3 dadi una somma di punti superiori a 14,* è la somma della probabilità di fare 15, 16, 17 e 18 punti.

40. PROBABILITÀ COMPOSTA. Se un avvenimento A è dovuto all'avverarsi simultaneo o successivo di più avvenimenti $A_1, A_2, \ldots, A_i$ fra loro indipendenti, di cui le probabilità favorevoli siano rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_i$, si dice che l'avvenimento A è un *avvenimento composto*; la sua probabilità p si dice *probabilità composta*.

La probabilità p *dell'avvenimento composto è eguale al prodotto delle probabilità favorevoli* $p_1, p_2, \ldots, p_i$ *degli avvenimenti semplici*

$$p = p_1 p_2 p_3 \ldots p_i .$$

Infatti, siano $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i$ i casi possibili ed $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_i$ i casi favorevoli degli avvenimenti semplici A_1, $A_2, A_3, \ldots, A_i$, sarà $p_1 = \frac{f_1}{n_1}, \ldots, p_i = \frac{f_i}{n_i}, \ldots\ldots$ Quando simultaneamente o successivamente i due avvenimenti A_1, A_2 si avverano, ciò succede perchè un qualunque caso favorevole di A_1 si è combinato con un qualunque caso favorevole di A_2, le combinazioni favorevoli possibili sono in numero $f_1 f_2$, mentre tutti i casi possibili danno $n_1 n_2$ combinazioni; dunque la probabilità favorevole della concorrenza dei casi A_1, A_2 è data da $\frac{f_1 f_2}{n_1 n_2}$, cioè da $\frac{f_1}{n_1} \cdot \frac{f_2}{n_2} = p_1 p_2$. L'avverarsi simultaneo dei casi A_1, A_2, A_3 avrà la probabilità $p_1 p_2 p_3$ e così seguitando.

Un caso particolare della probabilità composta è che un avvenimento si ripeta n volte nelle condizioni identiche. Se p è la probabilità dell'avvenimento semplice, sarà p^n la probabilità che l'avvenimento si ripeta n volte.

Occorre però notare che se gli avvenimenti non sono indipendenti fra loro, la probabilità composta si ottiene mol-

tiplicando la probabilità favorevole al 1°, per la probabilità favorevole al 2° dopo che il 1° si è effettuato, e moltiplicando il prodotto precedente per la probabilità favorevole al 3°, dopo che si è effettuato il 2°, e così di seguito.

41. Se p è la probabilità favorevole di un avvenimento A la probabilità contraria è $q = 1 - p$; quindi la probabilità affinché non si effettui n volte di seguito è q^n. Da ciò si deduce che la propabilità affinché l'avvenimento A si effettui una volta almeno su n prove è

$$Q = 1 - q^n .$$

Da questa eguaglianza si deduce $q^n = 1 - Q$ e quindi $n = \frac{\log(1 - Q)}{\log q}$; dunque:

Il numero delle prove necessarie affinché si possa avvenire l'avvenimento A *con la probabilità* Q, *supposto sia* q *la probabilità contraria all'avvenimento semplice* A, *è il numero immediatamente superiore a* $\frac{\log(1 - Q)}{\log q}$.

42, Esempii. 1.° *In un'urna vi sono i numeri da* 1 *a* m; *si cerca la probabilità che fra* n *estratti vi siano* p *di* s *numeri assegnati prima*

I casi possibili sono $\binom{m}{n}$. I casi favorevoli sono che p fra gli s numeri assegnati, che sono possibili in $\binom{s}{p}$ modi, siano accoppiati con $n - p$ dei rimanenti $m - s$ numeri, che possono presentarsi in $\binom{m-s}{n-p}$ modi.

Dunque la probabilità è

$$\frac{\binom{s}{p}\binom{m-s}{n-p}}{\binom{m}{n}} .$$

2.° *Si hanno due urne, in una vi sono i numeri da* 0 *a* 9, *e nell'altra le decine da* 10 *a* 90, *qual'è la probabilità di fare il numero* 72 *estraendo un numero dall' una e uno dall' altra?*

La probabilità di estrarre il 70 è $\frac{1}{9}$, e quella di estrarre il 2 è $\frac{1}{10}$, quindi la probabilità di estrarre 72 è $\frac{1}{90}$, cioè è la stessa che si avrebbe se i novanta numeri da 10 a 99 fossero in un'urna sola.

Ciò spiega perchè nelle estrazioni delle Lotterie invece di imbussolare tutti i numeri in un'urna sola, si imbussolano in diverse urne le unità dei diversi ordini dei numeri da estrarre.

3.° *Un' urna contiene 6 palline bianche e 10 nere, qual' è la probabilità che prendendo 5 palline ve ne siano 2 bianche?*

Risposta: $$\binom{6}{2}\binom{10}{3}:\binom{16}{5}=\frac{75}{282}\ .$$

4.° *In un'urna vi sono 6 palline bianche, 4 rosse, 5 verdi; qual'è la probabilità di estrarre in tre successive estrazioni sempre pallina verde, supposto ogni volta rimessa la pallina verde nell'urna?*

$$\frac{5}{15}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{5}{15}=\frac{1}{27}\ .$$

5.° *Qual'è la probabilità di estrarre, dalla stessa urna precedente, in tre successive estrazioni pallina verde, nell' ipotesi di non rimettere la pallina verde?*

Qui si deve supporre che, dopo che si sia effettuato il primo sorteggio della pallina verde si effettui il secondo avvenimento, e così egualmente pel terzo; quindi la probabilità cercata è

$$\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{13}=\frac{2}{91}\ .$$

5.° *Qual'è la probabilità di ottenere 6 una sola volta con un dado in 3 tiri?*

La probabilità che non esca 6 in ogni tiro è $\frac{5}{6}$, e per tutti i tre tiri è $\frac{5^3}{6^3}$. Perciò la probabilità di ottenere il 6 è

$$1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{90}{216}\ .$$

7.° *In quanti getti del dado la probabilità di fare 6 è* $\frac{3}{4}$?

Posto che il numero dei getti del dado siano x, si ha

$$x = \frac{\log\left(1 - \frac{3}{4}\right)}{\log\frac{5}{6}} = \frac{\log\frac{1}{4}}{\log\frac{5}{6}} = 7{,}6\ldots$$

e quindi la probabilità cercata si può avere in 8 getti.

43. PROBABILITÀ CHE UN EVENTO ACCADA r VOLTE DOPO n TENTATIVI. Se p è la probabilità favorevole dell'evento, e $q=1-p$ è la probabilità contraria, la probabilità che l'evento si verifichi una determinata volta sola sopra n tentativi e non succeda negli altri è per il teorema della probabilità composta

$$pq^{n-1}\ .$$

Se invece si chiede la probabilità che l'evento accada in uno qualunque degli n tentativi e non negli altri è per il teorema della probabilità totale

$$npq^{n-1}\ .$$

La probabilità che sopra n tentativi l'evento si effettui in 2 soli e determinati tentativi e non negli altri è p^2q^{n-2}; e quella che si effettui in due qualunque di essi e non negli altri è la somma di tante volte p^2q^{n-2} per quante sono le combinazioni a 2 a 2 degli n tentativi, cioè $\binom{n}{2}p^2q^{n-2}$.

In generale la probabilità affinché l'evento si verifichi in r tentativi qualsiasi fra gli n e non negli altri è $\binom{n}{r}p^rq^{n-r}$.

La probabilità che l'evento si verifichi non r volte esattamente, ma almeno r volte, entro n tentativi, è la probabilità totale che si verifichi una volta, due volte, ecc. quindi è

$$\sum_1^n{}_r\binom{n}{r}p^rq^{n-r}\ .$$

ESEMPIO. *Da un'urna contenente 10 gruppi di palline numerate da 1 a 4, si estrae 8 volte una pallina e ogni volta si rimette nell' urna. Qual'è la probabilità di estrarre 3 volte il numero 2?*

La probabilità di estrarre 2 è $\frac{1}{4}$, e quella di non estrarla è $\frac{3}{4}$, perciò la probabilità di estrarre 3 volte 2 su 8 tentativi è

$$\binom{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{3^5}{4^8} = \frac{1701}{8192}.$$

44. PROBABILITÀ A POSTERIORI O DELLE CAUSE. Un avvenimento A sia dovuto alle cause $C_1, C_2, \ldots, C_n$, che si escludono scambievolmente, e sono indifferentemente tutte egualmente probabili a priori oppur no, e sia p_1 la probabilità che A sia dovuto alla causa C_1, p_2 la probabilità che A sia dovuto alla causa C_2, ecc. Quando l'avvenimento è effettuato in una prova si può ricercare quale è la probabilità P_i, che l'evento sia dovuto alla causa C_i, questa probabilità si chiama *a posteriori*. Essa è stata assegnata da Bayes *) con la formola seguente:

$$P_i = \frac{p_i}{\Sigma p_i} \tag{1}$$

se tutte le cause erano egualmente probabili a priori, e con la formola

$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\Sigma \omega_i p_i} \tag{2}$$

se ogni causa C_i può avere una diversa probabilità ω_i di far effettuare l'avvenimento A.

Per dimostrarla si può fare il seguente ragionamento:

Perché l'avvenimento sia prodotto dalla causa C_i, bisogna: 1° che questa causa sia messa in azione; 2° che essa produca l'avvenimento A; ciò dà luogo ad una probabilità composta di ω_i e p_i, e quindi la probabilità H_i perché l'avvenimento A sia, avanti ad ogni prova, dovuto all'influenza di C_i è $\omega_i p_i$. Allo stesso valore si può giungere con quest'altro ragionamento: bisogna che l'avvenimento sia prodotto da una qualunque delle cause, e ciò importa la probabilità $\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \ldots + \omega_n p_n$,

*) T. Bayes, *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances* (1763).

e poi che esso sia prodotto dalla causa C_i, il che per ipotesi ha la probabilità P_i; dunque la probabilità H_i dell'avvenimento A è pure espresso da

$$(\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \dots + \omega_n p_n) P_i \,.$$

Dall'eguaglianza delle due espressioni si ha

$$\omega_i p_i = (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \dots + \omega_n p_n) P_i$$

e quindi
$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\Sigma \omega_i p_i} \,.$$

Se le ω_i diventano eguali fra loro, le cause C_i hanno la stessa probabilità, e si ritrova la formola (1).

ESEMPIO. *Delle urne contengono rispettivamente 3 palline bianche e 2 nere, 5 bianche e 7 nere, 8 bianche e 2 nere, 4 bianche e 9 nere; essendo stata estratta una pallina bianca si vuol sapere quale è la probabilità che essa sia stata estratta dalla prima urna.*

La propabilità a priori della estrazione della pallina bianca dalle singole urne sono rispettivamente

$$\frac{3}{5}\,,\ \frac{5}{12}\,,\ \frac{4}{5}\,,\ \frac{4}{13}$$

quindi per *la regola di Bayes*, la probabilità a posteriori che sia stata estratta dalla prima è

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{5}{12}+\frac{4}{5}+\frac{4}{13}} = \frac{478}{1657} \,.$$

45. LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI. Sotto questo nome sono compresi due teoremi importantissimi uno di Jakob Bernoulli l'altro di S. D. Poisson *), dei quali qui cercheremo di darne un'idea con degli esempii.

In un'urna vi siano 5 palline bianche e 3 nere; la probabilità che si tiri una bianca è $\frac{5}{8} = p$, e quella delle nera è $\frac{3}{8} = q$; si tiri ogni volta una pallina e la si riponga suc-

*) J. Bernoulli, *Ars conjectandi*, 1713; S. D. Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements*, 1837.

cessivamente nell'urna, e si prolunghi indefinitamente l'operazione; ogni volta uscirà una pallina bianca o nera. Se m ed n sono i numeri delle palline bianche e nere uscite dopo s estrazioni, saranno $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$ i casi verificati a posteriori dei due avvenimenti. Al crescere del numero s, i valori $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$ varieranno e potranno essere rispettivamente eguali a p e q o differirne.

Dall'essere la somma

$$\frac{m}{s}+\frac{n}{s}=p+q=1 ,$$

risulta che

$$\left|\frac{m}{s}-p\right|=\left|\frac{n}{s}-q\right| ,$$

cioè che, in valore assoluto, le differenze suddette sono eguali: questo valore delle differenze si pone $=\theta$ e si è chiamato *scarto*. Buffon fece gettare una moneta in aria 4040 ed ottenne 2080 volte faccia in luogo di 2020, lo scarto fu $\frac{60}{4040}=\frac{3}{202}$. Si è cercato la determinazione di questo valore θ al crescere indefinito di s e si è dimostrato che: *aumentando il numero dei tentativi, la probabilità che si possa rendere lo scarto* $\left|\frac{m}{s}-p\right|$ *minore di un numero* ε *arbitrariamente scelto, tende al limite* 1.

Si può anche dire però semplicemente: *Per* s *crescente all' infinito, il rapporto* $\frac{m}{s}$ *tende a diventare eguale alla probabilità stessa* p.

Però contemporaneamente la differenza fra m *ed* sp *tende, al crescere di* s, *a superare qualunque numero.*

Con un esempio pratico ciò vuol dire che: se in un giorno piovoso su una piazza di 1000 basoli cadono 1000 goccie di pioggia, non ogni basolo avrà la sua goccia; ma se vi cadono 1000 milioni di goccie di pioggia, ogni basolo avrà il suo milione o la differenza sarà ben piccola per rispetto al milione.

Se due giuocatori di egual forza giocano indefinitamente, il rapporto delle partite vinte a quelle perdute da ciascuno

tende sempre più al limite uno; ma la differenza delle partite aumenta sempre, talvolta in più, talvolta in meno, ed è questa differenza crescente che cagiona la ruina infallibile di uno dei due.

Mentre tutto cambia se le condizioni di gioco sono ineguali. Il giocatore che è favorito dalle condizioni, ha un guadagno crescente oltre ogni limite, perché, per quanto piccolo sia il vantaggio, esso è moltiplicato pel numero crescente all'infinito delle giocate.

Un altro esempio si ha nell'immagine nettissima della legge della distribuzione dei colpi del bersaglio che si avrebbe, se si supponesse che le palle rimanessero tutte nel punto ove colpiscono. Poggiato il bersaglio su un piano orizzontale l'ammasso dei proiettili presenterebbe l'aspetto di una campana di cui la base circolare avrebbe per centro il punto di mira. Il tiratore più bravo restringerebbe la base della campana e la renderebbe più alta, il tiratore meno scelto darebbe luogo ad un solido meno alto e più largo alla base. Ma né l'uno, né l'altro potrebbero venir meno alla legge dello scarto qualora mirassero senza cangiare le condizioni di tiro. È perciò che per decidere del merito di ciascun tiratore si prende la distanza media delle palle di ciascuno dal centro del bersaglio; oppure meglio si prende la media dei quadrati degli scarti dei colpi. Ciò però dà degli svantaggi a chi ha la sfortuna di mandare anche una palla sola molto lontana del bersaglio, per cui senza molto andar pel sottile si suole anche premiare quegli che pone più palle nel bersaglio senza tener conto del valore dello scarto delle palle che non lo colpiscono *).

Un terzo esempio si ricava dalle estrazioni del lotto. La probabilità che sian sorteggiati numeri maggiori di 45 (o non maggiori di 45) è $^1/_2$. Ma intanto in ogni estrazione si hanno per lo più 2 o 3 numeri maggiori di 45, e qualche volta 4 o 1, è raramente 5 o nessuno. Se si tien conto di tutte le otto estrazioni di ogni settimana della nostra Nazione, si trova già che fra i 40 numeri sorteggiati quelli che sono maggiori di 45 sono in numero poco diverso da 20 se non

*) Bertrand, *Calcul des probabilités,* Paris 1889.

è di 20 giusto. E se si tien conto di tutte le estrazioni di un anno intero si troverà che il numero m dei numeri sorteggiati, maggiori di 45, se differisce in qualche modo da 1040, il rapporto della differenza a 2080 è molto piccolo. E così seguitando a contare gli stessi numeri per le estrazioni di 10, 20, 30 anni, ecc. questo rapporto continuerà a impicciolire e tenderà a zero col crescere del numero delle estrazioni che si considerano.

È notevole che la legge dei grandi numeri governa anche gli avvenimenti che non si potrebbero dire casuali, ma sono sempre soggetti alle stesse condizioni. Così su 10000 logaritmi delle tavole a 10 decimali si è trovato che la settima cifra decimale contiene

990	volte la	cifra	0
997	»	»	1
993	»	»	2
1012	»	»	4 ecc.

cioè, il numero delle volte che è ripetuta ciascuna cifra si aggira intorno al 1000 come vorrebbe la probabilità di ognuna di esse.

46. Speranza matematica. Un'applicazione del calcolo delle probabilità si fa alla determinazione dei rapporti fra la posta e la vincita del gioco, affinché il gioco sia equo.

Il gioco è equo quando la somma delle poste si ripartisce interamente ai giocatori stessi; cioè quando la somma delle poste è eguale alla somma delle vincite; ed inoltre i giocatori che hanno eguali eventi favorevoli hanno pure eguali vincite.

Se due giocatori hanno rispettivamente f_1, f_2 eventi favorevoli rispettivamente, ed hanno scommessa una somma S, le loro probabilità di vincita sono $\frac{f_1}{f_1+f_2}, \frac{f_2}{f_1+f_2}$. Se i giocatori fossero f_1+f_2, ed avessero tutti diritto ad un evento favorevole. la somma si dovrebbe dividere in parti eguali fra loro e quindi ad ognuno spetterebe $\frac{S}{f_1+f_2}$. Se invece f_1 di questi giocatori cedono i loro diritti ad un solo, questi deve esigere $\frac{Sf_1}{f_1+f_2}$ della somma. Dunque ai due gio-

catori spettano rispettivamente

$$\frac{Sf_1}{f_1+f_2}, \quad \frac{Sf_2}{f_1+f_2},$$

cioè spetta a ciascuno il prodotto della somma scommessa per la probabilità che egli ha di venirne in possesso. Questo prodotto si dice *speranza matematica.*

Dunque: la *speranza matematica in rapporto ad un eventuale guadagno è il prodotto del guadagno per la probabilità che si ha di ottenerlo.*

Quindi se n giocatori hanno le probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$ di vincere una somma S, le loro speranze matematiche sono

$$p_1S, p_2S, p_3S, \ldots, p_nS.$$

47. *In ogni gioco equamente condotto le poste dei giocatori devono essere rispettivamente eguali alle speranze matematiche relative alla vincita.*

Infatti, ammesso che le poste dei giocatori, che hanno tutti egual probabilità di vincere, debbano essere eguali, è evidente che quegli che riunisce in sè i dritti di vincita di più altri deve assumerne anche le poste; quindi le poste devono essere proporzionali alle probabilità di vincere. Chiamando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ queste poste, si ha

$$\frac{x_1}{p_1}=\frac{x_2}{p_2}=\ldots=\frac{x_n}{p_n}, \quad \text{e quindi} \quad \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}=\frac{x_1}{p_1}.$$

Ma la somma delle poste $=$ S, e $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, dunque

$$S=\frac{x_1}{p_1}=\frac{x_2}{p_2}=\ldots=\frac{x_n}{p_n}, \quad \text{e quindi} \quad x_1=Sp_1.$$

ESEMPII. 1.° *Due giocatori a dadi convengono che guadagna il primo se gettando il dado esce 1, e perde in caso contrario. Quali debbono essere le poste dei due giocatori.*

Il primo ha $\frac{1}{6}$ di probabilità di vincere, l'altro $\frac{5}{6}$, dunque le poste devono stare fra loro come 1 a 5.

2.° *Giocando al lotto una lira sopra ogni ambo, quale somma si dovrebbe guadagnare se si vincesse?*

Gli ambi che si possono giocare sono 4005 e quelli che si pos-

sono vincere coll' estrazione di 5 numeri sono 10, quindi vincendo un ambo si dovrebbero incassare L. 400,50. Invece chi gioca al lotto vince soltanto L. 250! Ciò dovrebbe far pensare gli stolti giocatori che credono di arricchire giocando sistematicamente al lotto.

3.° *Un venditore ambulante mette in vendita un oggetto del valore di lire 16 e lo cede a chi pagando una certa posta fa con 3 dadi un punto inferiore a 10. Quale deve essere la posta per fare un gioco equo?*

I punti che fanno vincere sono 3,4,5,6,7,8,9. Tre punti si fanno in un modo solo, 4 punti si possono fare in 3 modi, 5 punti in 3 modi, 6 punti in 10 modi, 7 punti in 15 modi, 8 punti in 21 modi, 9 punti in 28 modi. Quindi la probabilità di vincere pel compratore è $\frac{81}{6^3} = \frac{3}{8}$.

La sua posta equa deve essere di L. $16 \times \frac{3}{8} = 6$; se invece, come avviene, il venditore richiede una posta maggiore, il gioco è tutto a suo vantaggio.

48. Speranza morale. La definizione precedente della speranza matematica è stata adottata per il caso in cui i due giocatori fossero egualmente ricchi. In caso diverso, mille lire per chi non ne possiede che 2000, hanno la stessa importanza di 500000 lire per chi ne possiede 1000000; una lira posseduta da chi appena può soddisfare ai suoi bisogni è di valore morale più grande di una lira posseduta da un ricco, quindi una lira perduta dal primo non ha il valore di una lira perduta dal secondo. Per stabilire dunque con giustizia le norme del gioco si deve tener conto anche della *fortuna* dei giocatori, cioè del vantaggio che ognuno di essi può ricavare dalla somma guadagnata. Questa nuova considerazione fu introdotta da Daniel Bernoulli *) che ammise il principio seguente: Il valore morale di una variazione infinitamente piccola della fortuna di una persona, cioè il vantaggio che questa persona può ricavare da una *variazione infinitesima* della sua fortuna, è proporzionale ad essa ed è in ragione inversa della fortuna che possiede.

Da ciò si è dedotto che per un individuo che possiede

*) Specimen theoriae novae de mensura sortis, 1730, Pietroburgo.

una fortuna a, e che attende un guadagno α con una probabilità p, la *speranza morale* è $\log \frac{(a+\alpha)^p}{a}$ *).

49. Probabilità degli avvenimenti futuri dedotta dall'osservazione. Ferme restando le notazioni del n. **44**, si supponga che sia P_i la probabilità *a posteriori* che l'avvenimento A sia dovuto alla causa C_i, ed l_i la probabilità che questa causa possa produrre l'avvenimento futuro B della identica natura di A. Se l'avvenimento B può essere prodotto indifferentemente dalle cause $C_1, C_2, \ldots, C_n$ si avrà per la probabilità totale dell'avvenimento B

$$P = P_1 l_1 + P_2 l_2 + \ldots + P_n l_n = \Sigma P_i l_i$$

e sostituendo alle P_i i valori dati dalla regola di Bayes si ha

$$P = \frac{\Sigma p_i l_i}{\Sigma p_i}, \quad \text{ovvero} \quad P = \frac{\Sigma \omega_i p_i l_i}{\Sigma \omega_i p_i},$$

secondo che le cause sono tutte egualmente probabili *a priori* o non.

Il problema principale della probabilità a posteriori consiste in ciò: Sapendo che un avvenimento si è prodotto m volte in $m+n$ tentativi, qual'è la probabilità che si possa produrre p volte con $p+q$ tentativi? Questo problema è stato risoluto da P. S. Laplace e J. de Condorcet **) e questi hanno dato una formola che per $p=1$, $q=0$ si riduce a

$$\frac{m+1}{m+n+2}$$

il che conferma che la probabilità a posteriori è tanto più prossima a quella dell'osservazione, per quanto più numerose sono le osservazioni fatte.

Su questo tipo sono le questioni riguardanti la *probabilità di vivere*. Per risolvere questi problemi occorre far uso delle *tavole di mortalità* costruite sui dati statistici e che danno il numero degli individui, fra 1000 o 10000 o 100000 nati vivi, che hanno raggiunto una determinata età.

---

*) Vedere H. Poincaré, Calcul des probabilités, Paris, 1896.

**) Laplace, Mém. sur la probabilité des causes par les évènements, 1774; Condorcet. Essai sur l'application de l'Analyse à la probalité des decisions rendues à la pluralité des voix. Paris, 1785.

Se per esempio si trova che su 10000 nati soltanto 5568 hanno raggiunta l'età di 20 anni e che il numero di quelli che hanno raggiunto 25 anni è 5288, la *probabilità di vivere ancora 5 anni per quelli che ne hanno* 20 è $\frac{5288}{5568}$. Allorquando per un individuo di una certa età la probabilità di vivere y anni è $\frac{1}{2}$, quel numero y di anni dicesi *durata probabile della vita* dell' individuo di quella data età. Per avere la *durata probabile della vita* di un individuo dalle tavole di mortalità si deve cercare nelle tavole il numero dei viventi dell'età dell'individuo, dividerla per due e cercare qual'età corrisponde a quest'altro numero di viventi. Per esempio supposto che si rilevi che all'età di 50 anni erano viventi 3964 individui, e che dalla tavola si rilevi che di questi ne vivevano soltanto 1982 all'età di 72 anni. si può conchiudére che per l'individuo di 50 anni la durata probabile della vita è di 22 anni.

Nell'intervallo fra 6 e 64 anni alcune compagnie di assicurazione calcolano la vita probabile y mediante la formola

$$y = 59 - \frac{3}{4} n ,$$

dove n è l'età dell'individuo; qui si sarebbe ottenuto

$$y = 59 - \frac{3}{4} \cdot 50 = 59 - 37,5 = 21,5 \ .$$

Esempio. *Due coniugi hanno l' età di 35 e di 49 anni, qual' è la probabilità che si trovino in vita insieme alla fine di 5 anni, e quale quella che si trovi in vita un solo almeno di essi.*

Se p è la probabilità risultante dalla tavola pel coniuge di 35 anni di raggiungerne 40, e p' quella pel secondo di raggiungerne 54, la probabilità che essi vivano ancora alla fine dei 5 anni è pp'. Invece $1 - p$, $1 - p'$ sono le probabilità di morire per ognuno di essi rispettivamente, quindi $(1 - p)(1 - p')$ è la probabilità che siano morti entrambi, e perciò $1 - (1 - p)(1 - p')$ è la probabilità che non siano morti entrambi, ma ne viva almeno uno *).

---

*) Si legga per maggiori dettagli e per altre applicazioni del calcolo delle probabilità anche: H. Laurent, Traité du calcul des probabilités, Paris, 1873. E. Czuber, die Wahrscheinlichkeitsrechung und ihre Anwendung. Leipzig, 1903.

Esercizi.

1. Quanti numeri di tre cifre significative tutte distinte si possono formare con le nove cifre significative? e quanti se ne possono formare se le tre cifre di ognuno non devono essere distinte? R. $D_{9,3}=504$, $D'_{9,3}=729$.

2. Quanti numeri di tre cifre tutte differenti esistono? e quanti ne esistono di tre cifre ripetute o no? R. $D_{10,3}-D_{9,2}=648$; $D'_{10,3}-D'_{10,2}=900$.

3. Formare tutte le permutazioni delle parole *eva*, *roma*, *amido*, ecc. serbando l'ordine alfabetico da una permutazione all'altra.

4. Se le permutazioni delle lettere *abcdef* si scrivono alfabeticamente in qual posto si troverà il gruppo *dbafce*. R. 389°.

5. Determinare qual'è la 76ª permutazione di *abcde*, la 1832ª di *abcdefg*, la 569ª della parola *lipano*. R. *daecb, ecbdagf, napoli*.

6. Quante inversioni contiene il gruppo *bca*, o il gruppo *fcedab*. R. 4, 12.

7. Dimostrare che: 1.° $2P_n-(n-1)P_{n-1}=P_n+P_{n-1}$; 2.° $\frac{P^2_n}{P_{n-1}}=P_{n+1}-P_n$; 3.° $\frac{P_n}{1}, \frac{P_n}{2}, \frac{P_n}{3}, \ldots, \frac{P_n}{n}$ formano una progressione armonica. (Leibniz, l. c. 1666).

8. Dimostrare che vi è una sola permutazione di n elementi che fa $\frac{n(n-1)}{2}$ inversioni, che ve ne sono $n-1$ che ne fanno $\frac{n(n-1)}{2}-1$, che ve ne sono $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ che ne fanno $\frac{n(n-1)}{2}-2$.

9. Dimostrare che esistono tante permutazioni di n elementi che fanno λ inversioni, quante ne esistono che ne fanno $\frac{n(n-1)}{2}-\lambda$.
$\left(\text{Si suppone } \lambda<\frac{n(n-1)}{2}\right)$.

10. Verificare che delle 24 permutazioni di 4 elementi quelle che hanno 0,1,2,3,4,5,6 inversioni sono 1,3,5,6,5,3,1.

11. Trovare la somma di tutti i numeri che si hanno leggendo come numeri le permutazioni formate colle prime r cifre di un sistema di numerazione di base x (supposto $r\leqq x-1$). R. $\frac{(r+1)!}{2}\cdot\frac{x^r-1}{x-1}$.

Ogni cifra si trova in un dato posto $(r-1)!$ volte, quindi la somma è

$$(r-1)!\,(1+2+3+\ldots+r)\,(x^{r-1}+x^{r-2}+\ldots+1)\ .$$

Oppure, ogni permutazione ammette la sua complementare, tale cioè che le cifre dello stesso posto abbiamo per somma $r+1$ quindi la somma è

$$\frac{r\,!}{2}\,[(r+1)+x(r+1)+x^2(r+1)+\ldots+x^{r-1}(r+1)]\ .$$

Per esempio nel sistema di base 10 la somma di tutti i numeri formati colle cifre 1,2,3,4,5 è $\frac{5\,!}{2}\times 66666=\frac{6\,!}{2}\,11111=3999960$.

12. Quanti numeri si possono fare con le cifre del numero 33352277. R. 1680.

13. GALILEO GALILEI annunziò l'$^{11}/_{12}$ 1610 la scoperta delle fasi di Venere col seguente anagramma

Haec immatura a me jam frustra leguntur o i,

che spiegò poi con la frase:

Cinthiae figuras aemulatur mater amorum.

Quante permutazioni si potevan fare con l'anagramma dato! e quanto tempo si sarebbe impiegato se si fossero potuto scrivere 343000 permutazioni a secondo?

14. GALILEO GALILEI annunziava il $^{30}/_{6}$ 1610 coll'anagramma

Smaismrmilmepoetalevmibunenugttaviras

che

Altissimum planetam tergeminum observavi,

cioè che gli era parso di vedere Saturno formato di tre corpi e KEPLER interpretava

Salve umbistineum geminatum Martia proles.

Trovare il numero di permutazioni che si potevano fare dell'anagramma di GALILEI, e supposto che KEPLER avesse creduto di intuire le parole *Salve* e *Martia*, quante gliene restavano a fare con le rimanenti lettere per trovare fra quelle il verso desiderato?

15. Un prodotto di k fattori positivi interi consecutivi è sempre divisibile per $k!$

16. Quanti ambi, terni, quaterne e quintine si possono formare con i 90 numeri del lotto. R. 4005, 117480, 2555190, 43949268.

17. Dati n punti nel piano o nello spazio, di cui tre non siano mai per diritto, quante sono le rette da essi individuate? R. $\frac{n(n-1)}{2}$.

18. Sapendo che il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è sestuplo di quelle delle combinazioni degli stessi oggetti a 2 a 2, trovare il numero di questi oggetti. R. $n=11$.

19. Dati n punti dello spazio, di cui 4 non siano mai in un piano quanti sono i piani da essi individuati? R. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

20. Dati n punti del piano, di cui tre mai per diritto, e tirate tutte le rette da essi individuate, in quanti altri punti diversi dai dati queste rette si segano a due a due, supposto che mai due di quelle rette siano parallele? R. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

21. Dimostrare che il numero delle combinazioni di m oggetti a 1 a 1, a 2 a 2, a 3 a 3, ecc. cresce sino a che gli elementi k di ogni gruppo sia la metà di m se m è pari, o sia eguale a $\frac{m-1}{2}$ se m è dispari. (Dalla formola (2) del n. **18** di questo Capitolo si deduce che cresce fino a che sia $\frac{m-k+1}{k}>1$, e quindi ...).

22. Quanti numeri di 4 cifre significative si possono fare tali che in ciascuno di essi una cifra non segua mai un'altra più grande. R. $C'_{9,4}=495$.

23. Trovare il valore di $\binom{m}{5}$ per $m=\frac{8}{2}$ supposto che la formola dello sviluppo di $\binom{m}{n}$ si mantenga inalterata anche per m frazionario.

24. Dimostrare che:

$$D_{a+b,m}=D_{a,m}+mD_{a,m-1}D_{b,1}+\binom{m}{2}D_{a,m-2}D_{b,2}+\dots+\binom{m}{n}D_{a,m-n}D_{b,n}+\dots+D_{b,m}\,.$$

— Eseguire i seguenti prodotti:

25. $(x-5)(x+2)(4-x)(x-8)(x-1)$:

26. $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-5)\left(x-\frac{2}{3}\right)[x-(3+2i)][x-(3-2i)]$.

27. Eseguire gli sviluppi

$$(x\pm a)^6\,,\ (3a-7b)^4\,,\ (5a-4b)^9\,,\ (a^3-3ab^2)^8\,,\ \left(3\frac{a^3b^2}{c}-2\frac{c^3}{a^2b}\right)^6.$$

28. Trovare la somma delle k^{me} potenze dei primi n termini di una progressione aritmetica di ragione d, il cui primo termine è a_0.

29. Dimostrare che $\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{2k}+\dots=2^{n-1}-1$,

$$\text{e che } \binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{2k-1}+\dots=2^{n-1}.$$

(Si tengano presenti le formole del n. **31** del Cap.).

30. Determinare il 4° termine dello sviluppo di $(m+n)^{17}$, il 14° termine di $(a+b)^{19}$, il 5° termine ed il termine medio di $(3a\pm5b)^{20}$.

31. Calcolare $(a+b)^n\pm(a-b)^n$.

32. Trovare che l'errore che si commette arrestandosi ai primi due termini dello sviluppo del binomio $(1+x)^m$ è

$$\varepsilon<\binom{m}{2}x^2\frac{3}{3-(m-2)x}\,,\quad \text{qualora sia}\quad \frac{m-2}{3}x<1.$$

33. Il termine medio dello sviluppo della potenza n^{ma} del binomio, per n pari ha per coefficiente

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\frac{n}{2}!}\,,\ \text{e per } n \text{ dispari } \frac{n(n-1)(n-2)\dots\left(\frac{n\pm1}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\dots\frac{n\pm1}{2}}.$$

34. Data la *matrice* di 4^2 numeri $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}$, la somma di tutti i prodotti che si ottengono attribuendo alle lettere *abcd* le diverse permutazioni degli indici 1234, presi questi prodotti col segno + o — secondo che la permutazione è di classe pari o dispari dicesi *determinante* dei 4^2 numeri. Applicare questa definizione a trovare il valore del determinante $\begin{vmatrix} 1&2&3&4\\ 2&3&4&5\\ 3&4&5&6\\ 7&8&9&0\end{vmatrix}$.

35. Dimostrare il teorema accennato nel n. **31** sulla serie di Fibonacci, cioè che, posto:

$$A=\binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\dots$$

$$A'=\binom{n+1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+\dots$$

si ha

$$A+A'=\binom{n+2}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+\dots$$

sia n pari o dispari.

36. Trovare il massimo termine dello sviluppo di $(p+q)^s$.

R. Sia esso $$\frac{s!}{\alpha!\,\beta!}p^\alpha q^\beta .$$

I termini precedente e seguente sono

$$\frac{s!}{(\alpha+1)!\,(\beta-1)!}p^{\alpha+1}q^{\beta-1}\quad,\quad\frac{s!}{(\alpha-1)!\,(\beta+1)!}p^{\alpha-1}q^{\beta+1},$$

e dall'essere questi minori del primo si ha

$$\frac{p}{\alpha}>\frac{q}{\beta+1}\quad,\quad\frac{p}{\alpha+1}<\frac{q}{\beta},$$

ovvero

$$\frac{\beta+1}{\alpha}>\frac{q}{p}>\frac{\beta}{\alpha+1}.$$

Aggiungendo alle tre frazioni l'unità, si ha

$$\frac{s+1}{\alpha}>\frac{p+q}{p}>\frac{s+1}{\alpha+1}$$

ovvero

$$(p+q)\alpha<(s+1)p<(p+q)(\alpha+1)$$

e quindi α è il massimo intero contenuto in $p(s+1):(p+q)$.

Egualmente si conchiuderebbe che β è il massimo intero contenuto in $q(s+1):(p+q)$.

37. Dimostrare che

$$(a+bi)^n=a^n-\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+i\left[\binom{n}{1}a^{n-1}b-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\dots\right].$$

— Supposto già dimostrato che la potenza del binomio si effettua con la legge dell'esponente intero anche quando l'esponente è negativo o frazionario) *teorema di* Newton) trovare che:

38. $$\begin{cases}(1+x)^{-1}=\dots\\ \sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1.3}{2\cdot4\cdot6}x^3-\dots\end{cases}$$

39. $$\begin{cases}(1-x)^{-1}=\dots\\ \sqrt{1-x}=\dots\end{cases}$$

40. $$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2\cdot4}x^2-\frac{1.3.5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\dots$$

41. $$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\dots$$

42. $$\frac{a^2}{b+x}=a^2(b+x)^{-1}=$$

43. Tenendo presente le potenze fattoriali, dimostrare che:

$$(x+y)^{\overline{n}}=x^{\overline{n}}+\binom{n}{1}x^{\overline{n-1}}y^1+\binom{n}{2}x^{\overline{n-2}}y^{\overline{2}}+\dots+\binom{n}{n}y^{\overline{n}}.$$

Si verifichi per $n=2$, indi si dimostri che essendo vera per n è vera pure per $n+1$.

44. Risolvere le equazioni:

$$2\binom{x}{4}-2\binom{x}{3}+\binom{x}{2}=0 \ .$$

$$30\binom{x}{5}+24\binom{x}{4}-21\binom{x}{3}-8\binom{x}{2}=0 \ . \qquad \text{R. Una radice è } -2.$$

$$23[(x+1)!]+48(x!)=(x+2)! \qquad \text{R. } -3; 23.$$

45. Trovare s_7, s_8.

46. Trovare la somma di $1\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+5\cdot7\cdot9+\ldots+(2n-1)(2n+1)(2n+3)$,

R. $\dfrac{n(n+1)(2n+3)}{2}$.

47. Verificare la formola

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot2\cdot3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-6}+\ldots+(-1)^p\frac{n(n-p-1)\ldots(n-2p+1)}{p!}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p}+\ldots$$

Si verifica per $n=2$ e 3, poi ammessa vera per $n-1$ ed n si dimostra vera per $n+1$, tenendo presente che

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}\right)=x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}} \ .$$

Si riduce in sostanza a dimostrare che

$$\frac{n(n-p-1)\ldots(n-2p+1)}{p!}+\frac{p(n-1)(n-p-1)\ldots(n-2p+2)}{p!}=$$

$$=\frac{(n-p-1)\ldots(n-2p+2)[n(n-2p+1)+p(n-1)]}{p!}=$$

$$=\frac{(n-p-1)\ldots(n-2p+2)(n+1)(n-p)}{p!}=\frac{(n+1)(n-p)(n-p-1)\ldots(n-2p+2)}{p!} \ .$$

48. Trovare lo sviluppo di $(1+x+x^2+x^3)^5$.

49. Trovare il numero dei termini $(x+y+z)^{10}$, ed i coefficienti dei termini x^4y^6, $x^2y^3z^5$.

50. Dimostrare che $\sum\dfrac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}=m^n$ per $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n$. (Si vegga il n. 31).

51. Dimostrare che se p è un numero primo non divisore di n, p è divisore di $n^{p-1}-1$ (Teor. di Fermat).

Infatti, essendo p numero primo $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^p=a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p+p\mathrm{E}$ (dove E è un polinomio intero), e posto a_1, a_2 ..., a_n eguali tutti ad 1 si ha $n^p=n+p\mathrm{E}$, $n^p-n=p\mathrm{E}$, $n(n^{p-1}-1)=p\mathrm{E}$, quindi p divide $n^{p-1}-1$.

52. Qual' è la probabilità di far 5 punti, o 6, o 7, o 8, o 9, o 11, o 12 con 3 dadi? R. Per 5 punti $\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{1}{36}$, per 6 punti $\dfrac{10}{6^3}$, ecc. $\dfrac{27}{6^3}$ per 11, $\dfrac{25}{6^3}$ per 12.

53. Qual'è la probabilità di fare con tre dadi un numero di punti minori o eguale a dieci, e quale quella di sorpassare il numero 10?

R. Le probabilità sono eguali.

54. La probabilità di vincere un determinato numero al lotto è $\frac{1}{18}$

» » » ambo » è $\frac{2}{801}$

» » » terno » è $\frac{1}{11748}$

» » una determinata quaterna » è $\frac{1}{511038}$

» » » quiniina » è $\frac{1}{43949268}$.

55. Trovare la probabilità di vincere un terno al lotto con un bigliettone di 10 numeri. R. $\frac{31600}{3662439}$.

56. Un'urna contiene α palline bianche e β palline nere; si domanda qual'è la possibilità di estrarre a palline bianche e b nere. R. $\dfrac{\binom{\alpha}{a}\binom{\beta}{b}}{\binom{\alpha+\beta}{a+b}}$.

57. Un'urna contiene 5 palline bianche e 7 nere; un'altra contiene 8 palline bianche e 10 nere; qual'è la probabilità che estraendo dalla prima 6 palline se ne abbiano due bianche, e estraendone 9 dalla seconda se ne abbiano 4 bianche? R. $\binom{5}{2}\binom{7}{4}\binom{8}{4}\binom{10}{5} : \binom{12}{6}\binom{18}{9}$.

58. In un'urna vi sono 5 palline bianche e 7 rosse, in un'altra vi sono 7 palline bianche e 8 rosse, qual'è la probabilità che estraendo 4 palline dalla prima urna e 6 dalla seconda si abbiano tutte palline bianche o tutte palline rosse?

R. $\left[\binom{5}{4}\binom{7}{6}+\binom{7}{4}\binom{8}{6}\right] : \binom{12}{4}\binom{15}{6}$.

59. Qual'è la probabilità di vincere con 4 dadi sul numero 4, o sul 5, ecc. o sul 24?

60. Si hanno n urne. Nella prima vi sono n palline bianche, nella seconda $n-1$ bianche, ed 1 nera; nella terza $n-2$ bianche e 2 nere, e così seguitando, e nell'ultima 1 bianca ed $n-1$ nere.

Qual'è la probabilità che estraendo a caso 1 pallina da una qualunque delle urne essa sia bianca? R. $\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

61. In un'urna vi sono tante palline da poterle tutte serrare in un pugno, e sono in tutto n. Qual'è la probabilità che serrando il pugno a caso sulle palline se ne prendano un numero pari? e qual'è che se ne prendano un numero dispari? R. $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$, $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$. (Si vegga l'es. **29**).

62. Il R. Lotto dà, a chi vince un estratto, 10,50 volte la posta, e a chi vince l'ambo 250 volte, il terno 4250 volte e la quaterna 60000 volte la posta. Quanto dovrebbe dare invece perché il gioco fosse equo?

63. Essendo p la probabilità dell'avvenimento A, e q la probabilità contraria; sopra s tentativi qual'è l'evento più probabile?

Sviluppando la potenza $(p+q)^s$ si ottiene

$$(p+q)^s=p^s+\binom{s}{1}p^{s-1}q+\binom{s}{2}p^{s-2}q^2+\ldots+q^s :$$

e si può notare che il primo termine dello sviluppo della potenza s^{esima} del binomio $p+q$, dà la probabilità che, in s prove, l'avvenimento A si presenti s volte, il secondo termine dà la probabilità che si presenti A $s-1$ volte e B una volta, ecc.; e siccome i termini dello sviluppo danno la probabilità di tutti i casi che si possono presentare, la loro somma deve essere eguale ad 1; come lo è difatti perché $p+q=1$.

L'avvenimento più probabile è quello che sarà rappresentato dal termine massimo dello sviluppo di $(p+q)^s$, e quindi per l'es. **36** è quello in cui l'esponente di p rappresenti il massimo intero contenuto in $p(s+1)$.

ESEMPIO. In un'urna vi sono 30 palline bianche e 90 nere, supposto che si tirino 100 volte una pallina e la si riponga nell'urna, quale è il numero di palline bianche che si potrà più probabilmente estrarre.

R. $E(100+1)\frac{30}{120} = E\left(101 \times \frac{1}{4}\right) = 25$.

CAPITOLO SECONDO.

FRAZIONI CONTINUE.

1. Dato un numero misto $a_0 + \frac{b_1}{a_1}$, se al denominatore a_1 aggiungiamo una seconda frazione $\frac{b_2}{a_2}$, ed al denominatore di questa aggiungiamo una frazione $\frac{b_3}{a_3}$, ed al denominatore di questa una frazione $\frac{b_4}{a_4}$, e così via si avrà una espressione numerica della forma

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \dots}}}}$$

che prende il nome di *frazione continua discendente*.

Una tal frazione si scrive più semplicemente ancora

$$a_0 \dot{+} \frac{b_1}{a_1} \dot{+} \frac{b_2}{a_2} \dot{+} \frac{b_3}{a_3} \dot{+} \frac{b_4}{a_4} \dot{+} \dots$$

ove ciascun segno $+$ è rimpiazzato dal segno $-$ quando occorra *).

Se invece i termini frazionarii stessi si aggiungono rispettivamente al numeratore della frazione precedente si ha l'espressione

$$a_0 + \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{b_2 + \cfrac{b_4 + \dots}{a_4}}{a_2}}{a_2}}{a_1}$$

che dicesi *frazione continua ascendente* **).

---

*) Si usano anche le seguenti notazioni

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \frac{b_3}{a_3 +} \frac{b_4}{a_4 + \dots}$$

$$a_1 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \frac{b_3|}{|a_3} + \frac{b_4|}{|a_4} + \dots$$

**) L' inventore dell' algoritmo delle frazioni continue discendenti

Ogni frazione continua si distingue in *limitata* o *illimitata* secondo che i termini aggiunti sono in numero finito o infinito.

Qui studieremo soltanto le frazioni continue discendenti che hanno tutte le b eguali all'unità, cioè le frazioni continue di questa forma *)

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

I numeri $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ si suppongono tutti positivi e diversi da zero, eccetto il primo che può anche mancare.

I numeri $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ si dicono *denominatori parziali o incompleti*, o anche *quozienti parziali o incompleti.*

Le espressioni numeriche

$$a_0 \quad , \quad a_0 + \frac{1}{a_1} \quad , \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \; , \dots$$

si dicono rispettivamente *1ª ridotta*, *2ª ridotta*, *3ª ridotta*, ... della frazione continua, e si indicano brevemente con $R_0, R_1, R_2, \dots$

P. A. Cataldi (*Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri*, Bologna, 1613). Delle frazioni continue ascendenti si trovano tracce nelle frazioni sistematiche sessagesimali dell'antichità, cioè nelle frazioni del tipo $a_0 + \frac{b_1}{a} + \frac{b_2}{a^2} + \frac{b_3}{a^3} + \dots$ applicate al caso di $a = 60$, e che equivalgono ad

$$a_0 + \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{b_3 + \dots}{a}}{a}}{a}$$

; si ritrovano anche nella rappresentazione dei numeri rotti usati dagli arabi fin dal 12º secolo, poiché col simbolo $\frac{3\;4\;2}{5\;8\;9}$ indicavano la frazione ascendente

$$\cfrac{2 + \cfrac{4 + \cfrac{3}{5}}{8}}{9}$$

. Leonardo Fibonacci da Pisa, col *Liber Abaci*, nel 1202 introdusse in Europa questo simbolo.

*) Per le frazioni continue a numeratori eguali ad 1 si è anche proposto la seguente notazione $(a_0, a_1, a_2 \dots, a_n)$ da G. Lejeune Dirichlet.

2. FORMAZIONE DELLE RIDOTTE. La prima ridotta si può scrivere $\frac{a_0}{1}$; la seconda $\frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$; la terza si ottiene dalla seconda sostituendo invece di a_1 il numero $a_1 + \frac{1}{a_2}$ e quindi è $\frac{a_0\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) + 1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$. Per semplificarla si moltiplichi denominatore e numeratore per a_2 e si riduce alla forma $\frac{a_0(a_1 a_2 + 1) + a_2}{a_1 a_2 + 1}$; e se dopo eseguita l'operazione accennata si mette in vista a_2 diviene $\frac{(a_0 a_1 + 1)a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}$. E quindi risulta che:

La terza ridotta ha per numeratore il numeratore della seconda moltiplicata per a_2 *più il numeratore della prima; ed ha per denominatore il denominatore della seconda moltiplicata per* a_2 *più il denominatore della prima.*

3. Vogliamo ora dimostrare che, date due qualunque ridotte successive con analoga legge si potrà formare la ridotta seguente.

A tal' uopo consideriamo le quattro ridotte R_{n-2}, R_{n-1}, R_n, R_{n+1} e poniamo che sia

$$R_{n-2} = \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}},\; R_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\; R_n = \frac{P_n}{Q_n},\; R_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},$$

e supponiamo che per le prime tre di queste ridotte la legge si sia avverata, cioè che sia

$$R_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} \times a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} \times a_n + Q_{n-2}}.$$

Se da questa ridotta vogliamo ritenere la ridotta successiva, bisognerà sostituire ad a_n il numero $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$; quindi

$$R_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + Q_{n-2}};$$

e moltiplicando numeratore e denominatore per a_{n+1} essa risulta

$$= \frac{P_{n-1}(a_n a_{n+1} + 1) + P_{n-2}a_{n+1}}{Q_{n-1}(a_n a_{n+1} + 1) + Q_{n-2}a_{n+1}}$$

e mettendo in vista a_{n+1}, dopo aver eseguite le operazioni, risulta

$$= \frac{(P_{n-1}a_n + P_{n-2})a_{n+1} + P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_n + Q_{n-2})a_{n+1} + Q_{n-1}},$$

ovvero, essendo le parentesi uguali rispettivamente a P_n e Q_n,

$$R_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}},$$

Ma abbiamo verificato che la legge è vera per le prime tre ridotte, quindi essa è vera per la quarta, per la quinta, ecc. è vera dunque per tutte le altre *).

ESEMPIO. Sia la frazione continua $3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$.

La prima ridotta è $\frac{3}{1}$; la seconda è $\frac{7}{2}$; quindi la terza è $\frac{10}{3}$, la quarta è $\frac{57}{17}$; la quinta è $\frac{409}{122}$; la sesta è $\frac{3738}{1115}$.

Siccome la frazione continua data è limitata l' ultima ridotta rappresenta il suo valore numerico sotto forma di frazione semplice. E da ciò si deduce che *ogni frazione continua limitata è sempre eguale ad una frazione semplice.*

4. RELAZIONE TRA I TERMINI DI DUE RIDOTTE CONSECUTIVE. *Se* $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ *e* $\frac{P_n}{Q_n}$ *sono due ridotte consecutive si ha fra i loro termini la seguente relazione*

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}.$$

*) Più generalmente per le frazioni continue discendenti di numeratori $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, si avrebbe per i termini della ridotta R_{n+1}:

$$P_{n+1} = P_n a_{n+1} + P_{n-1} b_{n+1} \quad , \quad Q_{n+1} = Q_n a_{n+1} + Q_{n-1} b_{n+1}$$

si vegga un articolo di Ducci nel *Pitagòra*, Anno XIII, p. 48).

Infatti, l'espressione

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(P_{n-1}a_n+P_{n-2})Q_{n-1}-(Q_{n-1}a_n+Q_{n-2})P_{n-1}$$
$$=P_{n-2}Q_{n-1}-Q_{n-2}P_{n-1}=-(P_{n-1}Q_{n-2}-P_{n-2}Q_{n-1}),$$

cioè ha il valore opposto alla espressione analoga che si ottiene diminuendo di un'unità gli indici.

Ora considerando le prime due ridotte $\frac{a_0}{1}$ e $\frac{a_0a_1+1}{a_1}$ la espressione

$$P_1Q_0-P_0Q_1=a_0a_1+1-a_0a_1=1\ ;$$

dunque in valore assoluto la differenza suddetta è sempre uguale ad *uno*, ma cambia di segno se i suoi indici si aumentano o si diminuiscono di un'unità.

Il segno è $+$ se *n è dispari*, è $-$ se *n è pari*, quindi la differenza è in generale $=(-1)^{n-1}$.

5. *Le ridotte delle frazioni continue sono frazioni irriducibili.*

Infatti, se P_n e Q_n avessero un fattore comune diverso da uno, questo dovrebbe dividere il sottraendo e il sottrattore della differenza $P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n$ e quindi, per il teorema precedente, dovrebbe anche dividere l'unità; il che è assurdo. Quindi i termini della ridotta sono primi tra loro.

6. Indicando con Δ_n la differenza R_n-R_{n-1} fra la ridotta $(n+1)^{esima}$ e la ridotta n^{esima}, per il teorema precedente, si ha:

$$\Delta_n=R_n-R_{n-1}=\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{Q_nQ_{n-1}}\ .$$

Da ciò si deduce che date le successive ridotte di una frazione continua, la differenza fra ognuna di esse e la precedente è alternativamente una volta negativa ed una volta positiva.

7. Formola di Eulero *). Si noti che si può scrivere identicamente

$$R_n=R_n-R_{n-1}+R_{n-1}-R_{n-2}+R_{n-2}-\ldots\ldots-R_1+R_1-R_0+R_0\ ;$$

*) Euler, De fractionibus continuis. Comm, Acad. Petrop. 1737.

e quindi, aggruppando a due a due i termini del polinomio del secondo membro di questa eguaglianza, ed invertendo l'ordine, risulta per una qualunque ridotta

$$R_n = R_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots\ldots + \Delta_n$$
$$= a_0 + \frac{1}{Q_1 Q_0} - \frac{1}{Q_2 Q_1} + \frac{1}{Q_3 Q_2} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}} .$$

8. APPLICAZIONI.

1.° *Sviluppare in frazione continua una frazione ordinaria.* Sia per esempio da sviluppare in frazione continua la frazione $\frac{3483}{1243}$.

Si cominci con estrarre l' intero e si ha $\frac{3483}{1243} = 2 + \frac{997}{1283}$, che si può scrivere anche $= 2 + \cfrac{1}{\frac{1243}{997}}$.

Dall'ultima frazione si può estrarre l'intero, e si ha

$$\frac{3483}{1243} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{246}{997}} \quad \text{e invertendo} \quad = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{997}{246}}};$$

ed estraendo l'intero dall'ultima frazione

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{13}{246}}} \quad \text{e invertendo} \quad = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{246}{13}}}};$$

ed estraendo l'intero

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{18 + \frac{12}{13}}}} \quad \text{e invertendo} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{\frac{13}{12}}}}};$$

ed estraendo l'intero si ha

$$\frac{3483}{1253} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12}}}}}$$

In sostanza, se si opera come se si cercasse il M. C. D. fra i

termini della frazione data,

	2	1	4	18	1	12
3483	1243	997	246	13	12	1
997	246	13	12	1		

i successivi quozienti sono ordinatamente quozienti incompleti della frazione continua; però siccome l' operazione del M. C. D. è un' operazione che ha termine, così la frazione continua che si ottiene non sarà mai illimitata, ma avrà un numero finito di quozienti incompleti. Della frazione continua trovata le ridotte successive sono

$$\frac{2}{1}\,,\ \frac{3}{1}\,,\ \frac{24}{5}\,,\ \frac{255}{91}\,,\ \frac{269}{96}\,,\ \frac{3483}{1243}\,,$$

e, come doveva essere, l'ultima è eguale alla frazione data.

9. 2.º *Sviluppare in frazione continua un radicale quadratico.*

Sia il radicale quadratico $\sqrt{2}$. Essendo 1 la radice approssimata a meno di uno per difetto, e rappresentando con x un numero maggiore di uno, si può scrivere

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}\,,$$

donde si ha successivamente

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} = 2 + \frac{1}{y}\,.$$

Da cui si ha, sostituendo il valore di x nella prima equazione,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}\,.$$

Ma si ha inoltre dalla penultima equazione

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{y}\,, \qquad \text{da cui risulta} \qquad x = y\,,$$

quindi si può scrivere

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

E si badi che si è avuta una frazione continua illimitata; e ciò doveva prevedersi, perché se fosse risultata una frazione continua limitata, sarebbe stato di conseguenza un radicale irrazionale eguale ad un numero razionale, ciò che è assurdo.

Le successive ridotte di $\sqrt{2}$ sono

$$1\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{7}{5}\,,\ \frac{17}{12}\,,\ \frac{41}{29}\,,\dots$$

e questi sono tutti valori numerici approssimati di $\sqrt{2}$.

3.° *Sviluppare in frazione continua* $\sqrt{8}$.

Posto

$$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{x}\,,$$

si ha successivamente:

$$\sqrt{8} - 2 = \frac{1}{x}\,,$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{8} - 2} = \frac{\sqrt{8} + 2}{4} = 1 + \frac{1}{y}\,,\quad \frac{\sqrt{8} - 2}{4} - \frac{1}{y}\,,$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{8} - 2} = \frac{4\left(\sqrt{8} + 2\right)}{4} = \sqrt{8} + 2 = 4 + \frac{1}{z}\,,$$

$$\sqrt{8} - 2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{x}\,.$$

Quindi $z = x$ e perciò

$$\sqrt{8} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}}$$

4.° *Sviluppare in frazione continua* $\sqrt{a^2 - 1}$.

Il massimo intero contenuto in $\sqrt{a^2 - 1}$ è $a - 1$, quindi si

ha successivamente:

$$\sqrt{a^2-1}=(a-1)+\frac{1}{x} \quad , \quad \sqrt{a^2-1}-(a-1)=\frac{1}{x} \, ,$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}-(a-1)}=\frac{\sqrt{a^2-1}+(a-1)}{2(a-1)}=1+\frac{1}{y} \, ,$$

$$\frac{\sqrt{a^2-1}-(a-1)}{2(a-1)}=\frac{1}{y} \, ,$$

$$y=\frac{2(a-1)}{\sqrt{a^2-1}-(a-1)}=\sqrt{a^2-1}+(a-1)=2(a-1)+\frac{1}{z} \, ,$$

$$\frac{1}{z}=\sqrt{a^2-1}-(a-1)$$

e perciò $z=x$. Quindi

$$\sqrt{a^2-1}=(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2(a-1)+\dots}}}} \, .$$

10. 5.° *Applicazione delle frazioni continue alla ricerca dei logaritmi.* Si voglia trovare $\log 200$ nel sistema di base 10. Dev' essere $10^x=200$ e quindi $x>2$ e <3 e perciò possiamo scrivere $x=2+\frac{1}{y}$; e quindi deve essere $10^{2+\frac{1}{y}}=200$, ovvero successivamente

$$100 \cdot 10^{\frac{1}{y}}=200 \quad , \quad 10^{\frac{1}{y}}=2 \quad , \quad 10=2^y \, .$$

Il valore di y è compreso fra 3 e 4, quindi

$$y=3+\frac{1}{z} \, ,$$

da cui successivamente si ha

$$10=2^{3+\frac{1}{z}} \quad , \quad 10=8 \cdot 2^{\frac{1}{z}} \quad , \quad \frac{5}{4}=2^{\frac{1}{z}}$$

e quindi ancora

$$\left(\frac{5}{4}\right)^z=2 \, .$$

Il valore di z è compreso fra 3 e 4; quindi

$$z = 3 + \frac{1}{t},$$

e quindi deve essere

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{t}} = 2, \frac{125}{64}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{t}} = 2, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{t}} = \frac{128}{125}, \frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^{t}.$$

Siccome t è compreso fra 9 e 10, si ha

$$x = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9 + \dots}}}$$

e le prime ridotte sono

$$\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{23}{10}, \frac{214}{93}, \text{ecc.}$$

II. PROPRIETÀ RIGUARDANTI LE FRAZIONI CONTINUE CON QUOZIENTI INCOMPLETI POSITIVI. VALORE DELLA FRAZIONE CONTINUA.

1.° Supposto che $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ siano tutti maggiori di un numero positivo ε, dalla relazione $Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}$ risulta dapprima che $Q_n > Q_{n-2}$, e quindi

$$Q_0 < Q_2 < Q_4 < Q_6 < \dots,$$
$$Q_1 < Q_3 < Q_5 < Q_7 < \dots.$$

Se invece $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ sono $\geqq 1$ si ha

$$Q_n \geqq Q_{n-1} + Q_{n-2}$$

e quindi anche

$$Q_1 < Q_2 < Q_3 < \dots < Q_{n-2} < Q_{n-1} < Q_n.$$

Ma intanto, siano o no le $a_i \geqq 1$, poiché si ha

$$Q_{n-1} = a_{n-1} Q_{n-2} + Q_{n-3},$$

sotituendo questo valore nella formola precedente di Q_n

si ha $\quad Q_n = a_n a_{n-1} Q_{n-2} + a_n Q_{n-3} + Q_{n-2},$

e quindi $\quad Q_n > Q_{n-2}(a_n a_{n-1} + 1),$

ovvero $\quad Q_n > Q_{n-2}(1 + \varepsilon^2).$

Analogamente si avrebbe $Q_{n-2} > Q_{n-4}(1 + \varepsilon^2)$ e quindi mol-

tiplicando si ha

$$Q_n > Q_{n-4}(1+\varepsilon^2)^2 .$$

Per la stessa ragione si può scrivere

$$Q_n > Q_{n-6}(1+\varepsilon^2)^3 ,$$
$$Q_n > Q_{n-8}(1+\varepsilon^2)^4 ,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$Q_n > Q_{n-2k}(1+\varepsilon^2)^k ,$$

e quindi $\quad Q_{2k} > Q_0(1+\varepsilon^2)^k$, $Q_{2k+1} > Q_1(1+\varepsilon^2)^k$.

Se k cresce indefinitamente $(1+\varepsilon^2)^k$ cresce pure ed ha per limite l'infinito, quindi

$$\lim_{n=\infty} Q_n = \infty .$$

2.° *Le ridotte d'indice pari formano una successione di numeri crescenti.* Infatti, essendo

$$R_{2n} = R_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \ldots + \Delta_{2n-1} + \Delta_{2n} ;$$

se si accoppiano a due a due i termini Δ del secondo membro, risulta

$$R_{2n} = R_0 + (\Delta_1 + \Delta_2) + (\Delta_3 + \Delta_4) + \ldots + (\Delta_{2n-1} + \Delta_{2n}) ,$$

e siccome in ogni parentesi il primo termine è positivo e il secondo negativo, ed il primo è maggiore in valore assoluto del secondo, le parentesi sono tutte positive, e perciò

$$R_0 < R_2 < R_4 < R_6 < \ldots < R_{2n} .$$

3.° *Le ridotte di indice dispari formano una successione di numeri decrescenti.* Infatti, essendo

$$R_{2n+1} = R_0 + \Delta_1 + (\Delta_2 + \Delta_3) + (\Delta_4 + \Delta_5) + \ldots + (\Delta_{2n} + \Delta_{2n+1}) ,$$

poiché in ogni parentesi il primo termine è negativo ed il secondo è positivo, ed in valore assoluto il primo è maggiore del secondo, si ha:

$$R_1 > R_3 > R_5 > R_7 > \ldots > R_{2n+1} .$$

4.° *Una qualunque ridotta d'indice pari è minore di ogni ridotta d'indice dispari.*

Infatti, $R_{2n+1} = R_{2n} + \dfrac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}}$, e quindi $R_{2n+1} > R_{2n}$.

Un'altra ridotta di indice dispari minore di $2n+1$, p. es.

$R_{2(n-k)+1} > R_{2n+1}$, ed è quindi pure $> R_{2n}$.

Un' altra ridotta di indice dispari maggiore di $2n+1$, per es.

$R_{2(n+k)+1} > R_{2(n+k)}$, e quindi è pure $> R_{2n}$.

Cosicchè la ridotta di indice pari R_{2n} è minore di una qualunque ridotta di indice dispari.

5.° *La differenza di due ridotte consecutive tende a zero.*

Abbiamo trovato $\Delta_n = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}}$, quindi per il n. **11** la differenza fra due ridotte consecutive va impicciolendo con l'aumentare degli indici delle ridotte e inoltre

$$\lim_{n=\infty} |\Delta_n| = \lim \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} = \frac{1}{\lim(Q_n Q_{n-1})} = 0 .$$

6.° Da quanto precede risulta che le ridotte d'indice pari e quelle d'indice dispari della frazione continua costituiscono due classi di numeri aperte e contigue, che individuano un numero reale, irrazionale, questo numero reale si assume per *valore della frazione continua*. Esso è sempre compreso fra due ridotte consecutive, e se lo indichiamo con x, si può scrivere

$$x = \lim_{n=\infty} R_n .$$

12. *Limite dell'errore che si commette prendendo per valore della frazione continua la ridotta* R_n.

Il valore della frazione continua è compreso fra R_n ed R_{n+1}; perciò se indichiamo con x questo valore, sarà

$$|x - R_n| < |R_{n+1} - R_n|$$

e quindi

$$|x - R_n| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} .$$

Qualora i quozienti incompleti siano, oltre che positivi, anche $\geqq 1$, Q_{n+1} è maggiore di Q_n, e quindi $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}$, e risulta che

$$|x - R_n| < \frac{1}{Q_n^2} ,$$

cioè l'errore che si commette col prendere per valore della frazione continua la ridotta R_n è minore della frazione che ha per numeratore l'unità e per denominatore il quadrato del denominatore della ridotta stessa.

13. *Il valore di una frazione continua limitata o illimitata rimane immutato se tutta quella parte che comincia da un certo quoziente incompleto qualunque è sostituita col valore numerico della parte stessa.*

Sia

$$x = a_0 \dot{+} \frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \frac{1}{a_{n+1}} \dot{+} \cdots$$

e supponiamo inoltre che sia

$$a_{n+1} \dot{+} \frac{1}{a_{n+2}} \dot{+} \cdots = \mu$$

dico che

$$x = a_0 \dot{+} \frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \frac{1}{\mu} .$$

Se la funzione continua è limitata il teorema è evidente; se invece è illimitata deve aversi per definizione

$$\mu = \lim_{p=\infty} \left(a_{n+1} \dot{+} \frac{1}{a_{n+2}} \dot{+} \frac{1}{a_{n+3}} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{a_{n+p}} \right)$$

ed

$$x = \lim_{p=\infty} \left(a_0 \dot{+} \frac{1}{a_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \frac{1}{a_{n+1}} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{a_{n+p}} \right) .$$

Poniamo invece che sia

$$\mu_p = a_{n+1} \dot{+} \frac{1}{a_{n+2}} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{a_{n+p}} \quad \text{e quindi} \quad \mu = \lim_{p=\infty} \mu_p ;$$

in tal caso sarà la ridotta R_{n-p} una frazione continua limitata

$$R_{n+p} = a_0 \dot{+} \frac{1}{a_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \frac{1}{a_{n+1}} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{a_{n+p}}$$

$$= a_0 \dot{+} \frac{1}{a_1} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{1}{a_n} \dot{+} \frac{1}{\mu_p}$$

e quindi

$$R_{n+p} = \frac{P_n \mu_p + P_{n-1}}{Q_n \mu_p + Q_{n-1}} .$$

Ma $x = \lim_{p=\infty} R_{n+p}$ e quindi

$$= \frac{P_n \lim \mu_p + P_{n-1}}{Q_n \lim \mu_p + Q_{n-1}} = \frac{P_n \mu + P_{n-1}}{Q_n \mu + Q_{n-1}},$$

dippiù questo valore è la ridotta ultima di

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\mu},$$

risulta quindi che il teorema è vero.

14. FRAZIONI CONTINUE PERIODICHE. *Diconsi frazioni continue periodiche quelle i cui quozienti incompleti a cominciare da uno di essi si ripetono continuamente con lo stesso ordine.* La frazione continua periodica si dice semplice o mista secondo che i quozienti che si ripetono cominciano dal primo di essi o non.

15. *Ogni frazione continua periodica è sempre radice di un'equazione di secondo grado a coefficienti razionali.*

1.° Sia x una frazione continua periodica semplice dai quozienti incompleti periodici 2, 3,

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}}$$

se alla parte, che comincia dal terzo quoziente incompleto si sostituisce il suo valore, si avrà $x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}$, e quindi le sue ridotte sono $\frac{2}{1}, \frac{7}{3}, \frac{7x+2}{3x+1}$.

Ma la terza ridotta dev'essere uguale alla frazione continua data, perciò si ha l'equazione:

$$x = \frac{7x+2}{3x+1}$$

o la sua equivalente

$$3x^2 - 6x - 2 = 0 .$$

Risolvendo l'equazione si ha

$$x = \frac{3 \mp \sqrt{15}}{3} .$$

Delle due radici la negativa non è possibile e quindi resta l'unico valore

$$x = 1 + \frac{\sqrt{15}}{3} .$$

In generale nella frazione continua periodica

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_0 + \dots}}}}$$

sostituendo ad $a_0 + \frac{1}{a_1} + \dots$ il valore x si ha

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x}}}}$$

e dal valore dell'ultima ridotta si ha

$$x = \frac{P_{n-1}x + P_{n-2}}{Q_{n-1}x + Q_{n-2}} ,$$

da cui si deduce

$$Q_{n-1}x^2 + (Q_{n-2} - P_{n-1})x - P_{n-2} = 0 .$$

Questa equazione ha sempre il termine noto negativo e i suoi coefficienti sono sempre razionali e quindi le due radici dell'equazione sono reali e di segni contrari.

La radice positiva ci dà l'unico valore della frazione continua.

2.° Sia x la frazione continua periodica mista:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \dots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_0 + \dots}}}}}}}.$$

Indichiamo con y il valore della parte di questa frazione

continua che comincia con b_0 e si avrà

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{y}}}}}$$

ed inoltre

$$y = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cdots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{y}}}} .$$

L'ultima ridotta della prima frazione continua ci dà

$$x = \frac{P_k y + P_{k-1}}{Q_k y + Q_{k-1}} .$$

Da cui si deduce che

$$Q_k xy + Q_{k-1} x - P_k y - P_{k-1} = 0 .$$

Mentre dalla seconda frazione continua si ricava

$$y = \frac{P_{n-1} y + P_{n-2}}{Q_{n-1} y + Q_{n-2}} ,$$

che ci dà

$$Q_{n-1} y^2 + (Q_{n-2} - P_{n-1}) y - P_{n-2} = 0 .$$

Da questo sistema d'equazioni in x ed in y si può eliminare la y ricavandone il valore dalla prima e sostituendolo nella seconda, ciò darà un'equazione di secondo grado in x a coefficienti razionali, che risolve il problema; oppure si può risolvere prima la seconda, prenderne la sola radice positiva, e questa sostituirla nella prima per ottenere il valore corrispondente di x che dovrà risultare necessariamente positivo.

Per es. sia la frazione continua, coi quozienti incompleti periodici 1 e 3,

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}} \quad : \text{poniamo} \quad y = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}$$

e si ha successivamente

$$x = 2 + \frac{1}{y} \quad , \quad x = \frac{2y + 1}{y} \quad , \quad xy = 2y + 1 .$$

Ma

$$y = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{y}} ,$$

e le sue ridotte sono

$$\frac{1}{1} \quad , \quad \frac{4}{3} \quad , \quad y = \frac{4y+1}{3y+1} .$$

Dunque fra y e x sussistono le due equazioni

$$3y^2 - 3y - 1 = 0 \quad , \quad xy - 2y - 1 = 0 .$$

Ricavando il valore di y dalla seconda e sostituendolo nella prima si ha successivamente:

$$y = \frac{1}{x-2} \quad , \quad \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{3}{x-2} - 1 = 0 ,$$

$$3 - 3(x-2) - (x^2 - 4x + 4) = 0 \quad , \quad x^2 - x - 5 = 0 ,$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} .$$

Invece prendendo prima la radice positiva della prima equazione e sostituendola nella seconda, si sarebbe avuto successivamente

$$y = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} ,$$

$$x = 2 + \frac{6}{3+\sqrt{21}} = 2 + \frac{6(\sqrt{21}-3)}{12} = 2 + \frac{\sqrt{21}-3}{2} = \frac{1+\sqrt{21}}{2} .$$

16. *Ogni ridotta è più approssimata al valore della frazione continua della ridotta precedente.*

Sia y il valore della parte della frazione continua che comincia da a_{n+1}, sicché

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{y}}}}}$$

e quindi

$$x = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} .$$

Da ciò si deduce che la differenza

$$x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(P_n y + P_{n-1})Q_n - (Q_n y + Q_{n-1})P_n}{(Q_n y + Q_{n-1})Q_n} = \frac{\pm 1}{(Q_n y + Q_{n-1})Q_n};$$

e che la differenza

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(P_n y + P_{n-1})Q_{n-1} - (Q_n y + Q_{n-1})P_{n-1}}{(Q_n y + Q_{n-1})Q_{n-1}} = \frac{\mp y}{(Q_n y + Q_{n-1})Q_{n-1}}.$$

Ma y è un numero maggiore di 1 e $Q_{n-1} < Q_n$ dunque in quanto riguarda i valori assoluti

$$\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right|$$

e perciò la ridotta R_n è più approssimata della ridotta R_{n-1}.

17. *Ogni ridotta è più approssimata al valore della frazione continua di qualunque altra frazione avente termini più piccoli.*

Se $\frac{\alpha}{\beta}$ è una frazione approssimata al valore x più di $\frac{P_n}{Q_n}$ lo sarà anche più di $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ e quindi $\frac{\alpha}{\beta}$ è compresa fra $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ e $\frac{P_n}{Q_n}$, e per quanto riguarda i valori assoluti devė essere:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right| < \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \right|;$$

Eseguendo le sottrazioni si ha

$$\left| \frac{\alpha Q_{n-1} - \beta P_{n-1}}{\beta Q_{n-1}} \right| < \frac{1}{Q_n Q_{n-1}},$$

ovvero

$$|\alpha Q_{n-1} - \beta P_{n-1}| < \frac{\beta}{Q_n}.$$

Ma il primo membro è un numero intero positivo, quindi la frazione $\frac{\beta}{Q_n}$ è una frazione impropria, e perciò $\beta > Q_n$.

Per la stessa osservazione fatta innanzi la frazione $\frac{\beta}{\alpha}$

è compresa fra $\frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}}$ e $\frac{Q_n}{P_n}$ quindi deve essere

$$\left| \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} - \frac{\beta}{\alpha} \right| < \left| \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} - \frac{Q_n}{P_n} \right| .$$

Eseguendo le sottrazioni si ha

$$\left| \frac{\alpha Q_{n-1} - \beta P_{n-1}}{\alpha P_{n-1}} \right| < \frac{1}{P_n P_{n-1}} ,$$

ovvero

$$| \alpha Q_{n-1} - \beta P_{n-1} | < \frac{\alpha}{P_n} .$$

Ma il primo membro è intero positivo, dunque è $\alpha > P_n$. Sicché, per avere supposto che $\frac{\alpha}{\beta}$ sia più approssimata alla frazione continua di quello che non sia $\frac{P_n}{Q_n}$, è risultato che i termini α, β di questa frazione continua devono essere necessariamente maggiori dei rispettivi termini dell'altra, dunque un'altra frazione aventi termini più piccoli di R_n non può essere più approssimata di R_n. Perciò, quando di una frazione irreducibile con termini molto grandi si vuole avere un valore approssimato con termini più piccoli, è conveniente sceglierlo fra le ridotte della frazione continua eguale alla data.

18. *Se due frazioni continue, limitate o no, a denominatori interi e positivi, sono eguali fra loro, i denominatori dell' una devono essere rispettivamente eguali ai denominatori dell'altra.*

Sia

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 + \dots} = b_0 + \frac{1}{b_1 +} \frac{1}{b_2 + \dots} ;$$

poiché ciascuna di esse è della forma $q + \frac{1}{m}$, deve essere $a_0 = b_0$, e quindi resta

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots} .$$

Ciò importa che sia $a_1 = b_1$, e resta ancora

$$a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots} = b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}.$$

Da ciò si deduce che $a_2 = b_2$, e così di seguito; né può essere l'una limitata e l'altra no, perché si avrebbe in ultimo

$$a_n = b_n + \frac{1}{b_{n+1} + \dots},$$

il che è assurdo.

19. *Se un numero irrazionale* α *si svolge in frazione continua (necessariamente illimitata) e se* x *è il valore di questa frazione continua, deve essere* $x = \alpha$.

Applicando al numero α il metodo applicato a sviluppare in frazione continua un radicale quadratico supponiamo di aver trovato

$$\alpha = a_0 \dot{+} \frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{1}{a_{n-1}} \dot{+} \frac{1}{r}$$

e che invece la frazione continua illimitata x sia

$$x = a_0 \dot{+} \frac{1}{a_1} \dot{+} \frac{1}{a_2} \dot{+} \frac{1}{a_3} \dot{+} \dots \dot{+} \frac{1}{a_{n-1}} \dot{+} \dots .$$

Le ridotte di α siano $R_0, R_1, \dots, R_{n-1}, R_n$: queste appartengono a due classi di numeri fra le quali è sempre compreso il numero α, mentre le classi dâte dalle ridotte di x, che sono fino alla R_n le medesime, individuano il numero x. Se fosse $x \neq \alpha$ al proseguire della ricerca delle ridotte, le due classi da esse formate potrebbero individuare due numeri irrazionali distinti α ed x, e ciò è assurdo.

20. *Se di un numero* α *si conoscono due valori approssimati uno per difetto e l'altro per eccesso, e riducendo questi valori in frazioni continue si trovano eguali rispettivamente i primi* n *quozienti incompleti, anche* α *ridotto in frazione continua avrà gli stessi primi* n *quozienti incompleti.*

Siano infatti A, A′ i due valori approssimati di α, e sia

$$A = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{x} .$$

$$A' = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{y} ;$$

le parti intere di A ed A′ sono eguali, e siccome α è compreso fra A ed A′ deve pure avere la stessa parte intera quindi

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{z} .$$

Le parti frazionarie risultanti hanno lo stesso numeratore, quindi dovrà essere z compreso fra

$$a_1 + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad a_1 + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{y}$$

e quindi z avrà la stessa parte intera di entrambi, cioè a_1, e così via.

21. Un esempio notevole di questo teorema si ha nella ricerca dello sviluppo in frazione continua del numero π.

Si sa che π è compreso fra

$$3{,}1415926536 \quad \text{e} \quad 3{,}1415926535 ;$$

ora se si svolgono in frazioni continue questi numeri, si trovano per l'uno e per l'altro come primi quozienti incomrleti 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1 e poi si trova 6 pel primo numero e 1 pel secondo, dunque

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots$$

e le ridotte successive sono

$$\frac{3}{1} , \frac{22}{7} , \frac{333}{106} , \frac{355}{113} , \frac{103993}{34102} , \frac{104348}{33215} , \frac{208341}{66317} .$$

Le prime di queste ridotte sono valori approssimati del

numero π già noti pel passato prima che si conoscessero le frazioni continue. Il 3, e il $\frac{22}{7}$ già si adottarono prima di Archimede *), il quarto $\frac{355}{113}$ è quello adottato da Adriaen Metius nel principio del XVII secolo. Quest'ultimo, che dà per valore di π, 3,1415929..., è approssimato per eccesso a meno di

$$\frac{1}{113 \cdot 33102} = \frac{1}{3740526}.$$

22. APPLICAZIONE. *La durata dell'anno solare, cioè del tempo che il Sole impiega per ritornare allo stesso equinozio, fu assegnata da Laplace, in giorni* 365, 2422419 = 365^g 5^{ore} 48′ 49″,700016.

Sicché l'anno solare supera l'anno comune di 5^{ore} 48′ 49″,700016.

Trovare ogni quanti anni bisognerebbe intercalare un numero intero di giorni, affinché l'anno solare sia d'accordo con l'anno comune per un periodo di tempo più lungo possibile **).

Limitandoci ai soli decimillesimi di secondo, bisogna trovare il valore del rapporto $\frac{24^{ore}}{5^{ore}\,48'49'',7}$, cioè di $\frac{864000}{209297}$.

Sviluppando questo rapporto in frazione continua si trova che i quozienti incompleti sono

$$4 \quad 7 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 74$$

e quindi le ridotte sono

$$\frac{4}{1} \quad \frac{29}{7} \quad \frac{33}{8} \quad \frac{161}{39} \quad \frac{999}{242} \quad \frac{2159}{523} \quad \frac{3158}{765} \quad \frac{11633}{2818} \quad \frac{864000}{209197}.$$

Da queste ridotte si vede che intercalando un giorno ogni quattro anni si ha la correzione più semplice sì, ma la meno approssimata di tutte; e che invece più approssimata sarebbe quella di inserire 7 giorni ogni 29 anni, oppure 8 giorni ogni 33 anni, 39 giorni ogni 161 anni, ecc. L'intercalazione di un giorno ogni 4 anni è

---

*) Archimede (—287; —212) nella sua opera sulla *Misura del Cerchio* ci fa sapere che al suo tempo si conosceva già il valore approssimato $\frac{22}{7}$ e dimostrò che il rapporto della circonferenza al diametro è compreso fra $3 + \frac{10}{70}$ e $3 + \frac{10}{71}$.

**) Per l'anno 1900 la lunghezza dell'anno tropico ottenuta da Neucomb è di giorni 365,2422 con la variazione di — 0,000061 dopo 5000 anni.

quella che si fece in Italia col calendario giuliano l'anno 45 av. C. raddoppiando il *sexto calenda Martii*, che veniva il 24 Febbraio; questo giorno diventava *bissexto* e da ciò l'anno fu detto *bisestile*. Ma questa inserzione pecca in eccesso e perciò con la riforma *Gregoriana* (fatta da Gregorio XIII su proposta di Antonio Lilio) nell'anno 1582 si convenne di non render bisestile il 1° 2° 3° anno secolare ma solo il quarto, e così in 400 anni si inseriscono non 100 ma 97 giorni, con un errore di 20″ all'anno che danno quasi un giorno in 4000 anni. Se si sopprime un giorno ogni 4000 anni si ha la frazione $\frac{4000}{969}$, che dà appena l'errore di 0″.7 all'anno. La frazione $\frac{400}{97}$ non è fra le ridotte e quindi non è quella che dà con quei termini il valore più approssimato. L'inserzione di 8 giorni ogni 33 anni l'avevano adottata gli arabi nel 1079, per proposta dell'astronomo Alkaijâmi.

Se si fosse adoperato il rapporto $\frac{10000000}{2422419}$ si sarebbero avuti gli stessi quozienti fino al penultimo, sicché la parte trascurata non influisce sulla frazione $\frac{11633}{2818}$ e questa produrrebbe soltanto l'errore di un giorno in 508 335 294 anni.

Esercizi.

— Trovare le ridotte delle frazioni continue seguenti *):

1. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$

2. $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$

3. $1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11}}}}}$

4. $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{10+\dots}}}}$

— Sviluppare in frazioni continue le seguenti frazioni:

5. $\frac{5829}{7834}$, $\frac{32280}{36931}$, $\frac{9976}{6961}$, R. $\begin{cases}(0,1,2,1,9,1,3,1,1,6,3)\,, \\ (0,1,6,1,15,1,3,1,3,2,6), \\ (1,2,3,4,5,6,7)\,.\end{cases}$

---

*) Le ridotte della frazione continua **1** e **2** trovano applicazioni alla botanica, perché rappresentano la legge delle disposizioni delle foglie intorno ad un ramo. Esse ricordano nei loro numeratori e nei loro denominatori la serie di Fibonacci.

6. $\dfrac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+15a+7}$. R. $(0\,,\,a\,,\,a+1\,,\,a+2\,,\,a+3)$.

7. $\dfrac{48x^5+188x^2+252x+115}{48x^4+236x^3+464x^2+425x+151}$. R. $(0\,,\,x+1\,,\,2x+3\,,\,4x+5\,,\,6x+7)$.

8-19. Sviluppare in frazioni continue *):

$$\sqrt{10}\,,\ \sqrt{14}\,,\ \sqrt{19}\,,\ \sqrt{26}\,,\ \sqrt{27}\,,\ \sqrt{47}\,,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,,$$
$$\sqrt{2}\,,\ \sqrt{11}\,,\ \sqrt{41}\,,\ \sqrt{7}\,,\ \sqrt{31}\,.$$

R. $\left\{\begin{array}{l}\left(\sqrt{10}\,;\,3,\underline{6}\right)\,,\ \left(\sqrt{14}\,;\,\underline{3},\underline{1},\underline{2},\underline{1},\underline{6}\right)\,,\\ \left(\sqrt{19}\,:\,4,\underline{2},\underline{1},\underline{3},\underline{1},\underline{2},\underline{8}\right)\,,\ \left(\sqrt{47}\,:\,6,\underline{1},\underline{5},\underline{1},\underline{12}\right)\,,\\ \left(\sqrt{31}\,;\,5,\underline{1},\underline{1},\underline{3},\underline{5},\underline{3},\underline{1},\underline{1},\underline{10}\right)\,.\end{array}\right.$

— Sviluppare in frazioni continue

20. $\sqrt{a^2+1}$. R. $(a\,,\,\underline{2a})$.

21. $\sqrt{a^2+a}$. R. $(a\,,\,\underline{2}\,,\,\underline{2a})$.

22. $\sqrt{a^2+2}$.

23. $\sqrt{a^2+3}$ per $a>2$.

24. $\sqrt{a^2-a}$. R. $\left((a-1)\,,\,\underline{2}\,,\,\underline{2(a-1)}\right)$.

25. $\sqrt{a^2+2a}$. R. $\left(a\,,\,\underline{1}\,,\,\underline{2a}\right)$.

26. $\sqrt{a^2+b}$. R. $\left(a\,,\,\underline{\dfrac{2a}{b}}\,,\,\underline{2a}\right)$.

27. $\sqrt{a^2-2a+2}$.

28. L'equazione esponenziale $a^x=b$, ove siano a e b positivi ed $a\neq 0$, è sempre risoluta da un unico valore di x.

R. Se a e b sono maggiori di 1, col metodo indicato nel n. **8**, 5°, si ha per x un valore positivo:

se $a>1$, $b<1$, si risolve $a^x=\dfrac{1}{b}$ }
se $a<1$, $b>1$ » $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=b$ } e $-x$ è la radice della data equazione;

se $a<1$, $b<1$ » $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=\dfrac{1}{b}$ ed x è radice anche della data equaz.

Se $a^x=b$ fosse risolvibile da due valori x', x'' di x; si avrebbe $a^{x'-x''}=1$, $x'-x''=0$, $x'=x''$.

— Risolvere con frazioni continue le seguenti equazioni:

29. $(0,1)^x=15$ R. $(1\,,\,5\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots)$.

*) Per individuare una frazione continua periodica indicheremo con la notazione di Dirichlet i suoi quozienti incompleti successivi, fino all'ultimo dei periodici, sottolineando i quozienti periodici.

30. $2^x = 6$. R. $(2, 1, 1, 2, \ldots)$.

31. $x = \log 3$. R. $(0, 2 \ldots)$.

32. $x = \log_{10} 195$. R. $(2,3,2,4,3,2)$.

33. $5^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$.

34. $(0.125)^x = 0.0001$.

35. $2^{3^{3x}} = 512$.

— Trovare i valori delle frazioni continue periodiche degli es. **1** e **2** e le altre seguenti:

36. $x = (2, \underline{5}, \underline{3})$.

37. $x = (2, \underline{4}, \underline{3})$.

38. Trovare il valore della frazione continua periodica x dai quozienti incompleti $(2, 3, 4, \underline{5}, \underline{6}, \underline{7})$.

$$\text{R. } \left(3572x^2 - 16722x + 19567 = 0 \ , \qquad 1 = \frac{8361 \pm \sqrt{12997}}{3572}\right).$$

Le radici sono entrambe positive, quindi occorre verificare quale delle due radici è la cercata. Con l'altro metodo più lungo di calcoli si trova senza discussione che occorre prendere la radice con il segno —.

— Sviluppare in frazioni continue le radici delle equazioni seguenti:

39. $132x^2 - 444x + 373 = 0$. R. $(1,1,2,1,\underline{3},\underline{4})$; $(1,1,1,1,2,\underline{3},\underline{4})$.

40. $17x^2 + 25x - 29 = 0$. R. $(\underline{2},\underline{4},\underline{3},\underline{1}$ per $-x')$; $(\underline{1},\underline{3},\underline{4},\underline{2}$ per $1/x'')$.

41. $19x^2 - 104x + 138 = 0$. R. $(3,4,\underline{1},\underline{2},\underline{5}($; $(2,3,\underline{1},\underline{5},\underline{2})$.

42. $21x^2 + 22x - 56 = 0$. R. $(1,\underline{5},\underline{4},\underline{3})$; $(2,\underline{4},\underline{5},\underline{3})$.

43. $963x^2 + 1691x - 4417 = 0$. R. $(1,\underline{2},\underline{3},\underline{2},\underline{4},\underline{5},\underline{5},\underline{4})$; $(2,\underline{5},\underline{5},\underline{4},\underline{2},\underline{3}.\underline{2},\underline{4})$.

[Le relazioni fra le frazioni continue delle radici di un'equazione di 2° grado sono state trovate da E. Galois (cfr. Ann. des Math. pures et appl. vol. 19, 1828, 29, p. 294)].

44. Dimostrare che di una frazione continua periodica della forma generale

$$x = a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \ldots$$

le ridotte si possono formare come indica il seguente quadro:

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{a_0}{1} & \dfrac{a_0 a_1 + b_1}{a_1} & \dfrac{(a_0 a_1 + b_1) a_2 + a_0 b_2}{a_1 a_2 + b_2} & \dfrac{[(a_0 a_1 + b_1) a_2 + a_0 b_2]\, a_3 + (a_0 a_1 + b_1)\, b_3}{(a_1 a_2 + b_2)\, a_3 + a_1 b_3} \\ & b_2\ ,\ a_2 & b_3\ ,\ a_3 & \end{array}\right.$$

45. Quando le radici quadrate dei numeri si vogliono ottenere per mezzo di frazioni continue della forma generale, il periodo sarà sempre di un sol quoziente incompleto.

Infatti, posto $x = \sqrt{a^2 + b} = a + y$ si ha

$$x = a + \frac{b}{a + \sqrt{a^2 + b}} = a + \frac{b}{2a + y} \ ,$$

per cui

$$x = a + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \ldots .$$

Per es.

$$\sqrt{19} = \sqrt{16+3} = 4 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \ldots$$

e le sue ridotte sono

$$\frac{4}{1} \quad \frac{35}{8} \quad \frac{292}{67} \quad \frac{2441}{560} \quad \frac{20404}{4681} .$$

3 : 8 3 : 8 3 ; 8

46. Dimostrare che se $\frac{P_r}{Q_r}$ rappresenta la r^{ma} ridotta di una frazione continua periodica, la somma $P_r + P_{r-1}$ non si altera se sui primi r quozienti incompleti si esegue una permutazione ciclica.

(I quozienti incompleti siano $a_0, a_1, a_2 \ldots a_{r-1}$ e fatta la permutazione $a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_0$ sia $\frac{P'_r}{Q'_r}$ la ridotta r^{ma} della nuova fraz. continua. La $(r+1)^{ma}$ ridotta della data fraz. continua sarà espressa da $a_0 + \frac{Q'_r}{P'_r}$, e la r^{ma} della stessa si può anche esprimere con $a_0 + \frac{Q'_{r-1}}{P'_{r-1}}$.

Dalle eguaglianze

$$a_0 + \frac{Q'_r}{P'_r} = \frac{a_0 P_r + P_{r-1}}{a_0 Q_r + Q_{r-1}} \quad , \quad \frac{P_r}{Q_r} = \frac{a_0 P'_{r-1} + Q'_{r-1}}{P'_{r-1}}$$

si deduce $P'_r = a_0 Q_r + Q_{r-1}$, $P_r = a_0 P'_{r-1} + Q'_{r-1}$, $Q_r = P'_{r-1}$, donde $(P_r + Q_{r-1} = P'_r + Q'_{r-1})$.

47. Trovare le ridotte esatte del numero $e = 2{,}718281828$ limitato alle prime nove cifre. R. le ridotte sono 12 e l'ultima è $\frac{23225}{8544}$.

48. Trovare i valori approssimati del rapporto del diametro di un cerchio al lato del quadrato equivalente ad esso.

R. (1/0,886226995 : 1/1 , 8/7 , 9/8 , 35/31 . 44/39 , 123/109).

49. Trovare i valori approssimati del rapporto del diametro della sfera al lato del cubo ad essa equivalente.

R. (1/0,805996 ; 5/4 , 31/25 , 67/54 , 567/457).

50. Si dicono frazioni *intermedie* fra due ridotte R_{n-1} e R_n, quelle frazioni che si ottengono dalla seconda qualora in luogo di a_n si sostituiscono i numeri interi $1, 2, \ldots, (a_n - 1)$. Trovare le frazioni intermedie fra le ridotte $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, $\frac{161}{39}$, $\frac{999}{242}$ e $\frac{2159}{523}$ del n. **22**.

CAPITOLO TERZO.

DISEQUAZIONI E SISTEMI DI DISEQUAZIONI.

§ 1. — Teoremi generali.

1. Siano A e B due espressioni algebriche contenenti le variabili $x, y, z, \ldots$ e non identiche. Cercare per quali valori reali di $x, y, z, \ldots$ il valore numerico di A risulta maggiore di quello di B, vuol dire *risolvere la disequazione* $A > B$. Cercare per quali valori reali di $x, y, z, \ldots$ il valore numerico di A risulta minore di quello di B, vuol dire *risolvere la disequazione* $A < B$. Le lettere $x, y, z, \ldots$ si chiamano le *incognite* della disequazione,

Ogni sistema di valori di $x, y, z, \ldots$ che risponde alla questione proposta si dice *soluzione* della disequazione. Una disequazione può non essere soddisfatta da alcun valore delle incognite e allora è *assurda*; qualche altra può essere soddisfatta da qualunque valore reale delle incognite. Per esempio è assurda la disequazione

$$x^2 < 0 ,$$

poiché il quadrato di qualunque numero reale è positivo o nullo, mai negativo; e la disequazione $x^2 + 1 > 0$ è soddisfatta da qualunque valore reale di x.

Due disequazioni, che contengono le medesime incognite, si dicono *equivalenti*, quando esse hanno le stesse soluzioni. Per assicurarsene bisogna verificare che ogni soluzione della prima sia soluzione della seconda, e viceversa che ogni soluzione della seconda sia anche soluzione della prima.

Due disequazioni che hanno il medesimo segno $>$ o $<$ si dicono della stessa *classe*.

Le relazioni della forma $A \geqq B$ oppure $A \leqq B$ si dicono *condizioni miste*. La condizione mista $A \geqq B$ è soddisfatta dalle soluzioni della disequazione $A > B$, e dalle radici dell'equazione $A = B$.

Se si hanno più disequazioni ad una o a più incognite e si cercano le soluzioni che le verificano contemporaneamente

tutte, si dice che queste disequazioni formano un *sistema di disequazioni*. Per la risoluzione dei sistemi di disequazioni si veggano gli esempî 4°, 5°, 6°, 7° del n. **16** e quelli del n. **20**.

2. Teor. 1.° *) *Se si aggiunge ad ambo i membri di una disequazione* $A > B$ *una medesima espressione algebrica* C, *si ottiene un'altra disequazione* $A + C > B + C$ *equivalente alla prima, qualora nessuna soluzione di* $A > B$ *faccia assumere a* C *una espressione priva di significato.*

Infatti, ogni soluzione $x_1, y_1, z_1, \ldots$ della prima disequazione fa assumere ad A e B valori numerici a, b tali da essere $a > b$, e se questa soluzione fa assumere alla C un valore numerico ben determinato c, sarà pure $a + c > b + c$, e perciò essa è soluzione anche della seconda disequazione. Viceversa, ogni soluzione $x_1, y_1, z_1, \ldots$ della seconda fa assumere ad A, B, C valori numerici tali da far essere $a + c > b + c$, quindi rende anche $a > b$, e perciò è soluzione pure della prima disequazione.

Coroll. 1.° *In ogni disequazione si può sopprimere un termine comune ai due membri, e si può trasportare un termine da un membro all'altro ma col segno cambiato.*

Coroll. 2.° *Ogni disequazione* $A > B$ *si può ridurre alla forma* $M > 0$, *oppure alla forma* $M < 0$.

Qualora M sia funzione razionale intera delle incognite, si dice che la disequazione è ridotta alla *forma normale*.

Dicesi *grado* della disequazione ridotta alla forma normale il grado del polinomio M.

3. Teor. 2.° *Se si moltiplicano o si dividono ambo i membri di una disequazione* $A > B$ *per un medesimo numero* m, *differente da zero, la data disequazione è equivalente alla disequazione* $Am > Bm$ *se* m *è positivo, ed è invece equivalente alla disequazione* $Am < Bm$ *se* m *è negativo.*

Infatti, se $x_1, y_1, z_1, \ldots$ è una soluzione della disequazione $A > B$, essa fa assumere ad A e B valori numerici a, b tali da far essere $a > b$, e quindi se m è positivo sarà pure $am > bm$, e perciò $x_1, y_1, z_1, \ldots$ è soluzione di $Am > Bm$;

*) A Questi teoremi bisogna premettere quelli sulle *diseguaglianze* contenuti nella nostra *Aritmetica ed Algebra*.

mentre se m è negativo sarà invece $am < bm$ e perciò $x_1, y_1, z_1, \dots$ è soluzione di $Am < Bm$. Viceversa, $A > B$ sarà soddisfatta da una soluzione di $Am > Bm$ se m è positivo e sarà soddisfatta da una soluzione di $Am < Bm$ se m è negativo.

Coroll. 1.° *Si può cambiar segno ad ogni termine di una disequazione, purchè si cambi anche la classe della disequazione.*

Coroll. 2.° *Si può moltiplicare tutta la disequazione per il* m.c.m. *dei denominatori dei coefficienti delle incognite allo scopo di liberarla dai fratti.*

4. Teor. 3.° *Le soluzioni di una disequazione della forma intera* $AB > 0$, *o della forma frazionaria* $\frac{A}{B} > 0$, *sono quelle che verificano simultaneamente le due disequazioni* $A > 0, B > 0$, *e quelle che soddisfano simultaneamente le due disequazioni* $A < 0, B < 0$.

Infatti, queste soluzioni fanno assumere ad A e B valori numerici determinati dello stesso segno e quindi fanno assumere al prodotto AB o al quoziente $\frac{A}{B}$ un valore numerico determinato positivo, cioè > 0.

5. Teor. 4.° *Le soluzioni di una disequazione della forma intera* $AB < 0$, *o della forma frazionaria* $\frac{A}{B} < 0$, *sono quelle che verificano simultaneamente le due disequazioni* $A > 0$ *e* $B < 0$, *e quelle che verificano simultaneamente* $A < 0, B > 0$.

6. Da' due teoremi precedenti si deduce che le due disequazioni $A \cdot B > 0, \frac{A}{B} > 0$, o le altre $A \cdot B < 0, \frac{A}{B} < 0$ sono equivalenti fra loro. E quindi ogni disequazione frazionaria si può in tal modo ridurre alla forma normale.

7. Teor. 5.° *Per* n *intero positivo la disequazione* $A > \sqrt[2n+1]{B}$, *di indice dispari, è equivalente alla disequazione* $A^{2n+1} > B$; *e la disequazione* $A < \sqrt[2n+1]{B}$ *è equivalente ad* $A^{2n+1} < B$.

Infatti, se $x_1, y_1, z_1, \ldots$ è una soluzione della disequazione $A > \sqrt[2n+1]{B}$, essa fa prendere ad A e B valori numerici a, b tali da far essere $a > \sqrt[2n+1]{b}$, e quindi essendo $2n+1$ dispari anche $a^{2n+1} > b$ *), e perciò essa è soluzione anche della disequazione $A^{2n+1} > B$. Viceversa, ogni soluzione reale della seconda è soluzione anche della prima. Quindi per risolvere la disequazione $A > \sqrt[2n+1]{B}$, basta risolvere la disequazione $A^{2n+1} > B$. Analogo ragionamento si fa per $A < \sqrt[2n+1]{B}$.

8. Teor. 6.° *Per* n *intero positivo le soluzioni della disequazione* $A > \sqrt[2n]{B}$, *di indice pari, sono quelle del sistema* $\begin{cases} A^{2n} > B. \\ A > 0 \\ B \geqq 0 \end{cases}$

Sia $x_1, y_1, z_1, \ldots$ una soluzione di $A > \sqrt[2n]{B}$, e quindi tale da fare essere $a > \sqrt[2n]{b}$; ciò esige, nell'ipotesi di numeri reali, che sia $b \geqq 0$ ed $a > 0$ e se ne conclude che è anche $a^{2n} > b$, e perciò $x_1, y_1, z_1, \ldots$ è soluzione anche di $A^{2n} > B$, di $A > 0$ e di $B \geqq 0$.

Viceversa, una soluzione del sistema $A > 0, B \geqq 0, A^{2n} > B$, facendo assumere ad A un valore a positivo ed a B un valore b positivo o nullo, ed $a^{2n} > b$, rende pure $a > \sqrt[2n]{b}$, e quindi è soluzione di $A > \sqrt[n]{B}$.

Dunque, il sistema accennato e la data disequazione sono equivalenti.

Si può anche notare che $A^{2n} > B$ può essere inoltre soddisfatta da un sistema di valori $x_1, y_1, z_1, \ldots$ che rendano B negativa e facciano prendere ad A un qualunque valore; oppure che rendano B positiva e facciano prendere ad A un valore negativo opportuno; e che nel primo e nel secondo caso la soluzione non soddisfa la disequazione $A > \sqrt[2n]{B}$.

9. Teor. 7.° *Per* n *intero positivo le soluzioni della disequa-*

---

*) Cfr. *Aritmetica ed Algebra*, Cap. VI, 35.

zione $A < \sqrt[2n]{B}$, *di indice pari, sono date dalle soluzioni che soddisfano il sistema* $\begin{cases} A < 0 \\ B \geqq 0 \end{cases}$, *e da quelle che soddisfano il sistema* $\begin{cases} A \geqq 0 \\ A^{2n} < B \end{cases}$.

Infatti, ogni sistema di valori $x_1, y_1, z_1, \ldots$, che rendono B positiva o nulla ed A negativa, soddisfa la disequazione data. Ogni sistema x_1, y_1, z_1, di valori che fa rendere A positiva o nulla, e soddisfa la inequazione $A^{2n} < B$, rende B positiva e quindi soddisfa anche $A < \sqrt[2n]{B}$. Viceversa, un sistema di valori $x_1, y_1, z_1, \ldots$, che soddisfa $A < \sqrt[2n]{B}$, o fa assumere ad A un valore a negativo, ed allora basterà che renda B positiva o nulla; oppure fa prendere ad A un valore a positivo o nullo, in tal caso deve far prendere a B un valore b soltanto positivo, tale che sia $a^{2n} < b$ e quindi esso deve soddisfare anche $A^{2n} < B$.

§ 2. — Disequazioni di 1.° grado ad una incognita.

10. Ogni diseguazione di 1° grado ad una incognita si può sempre ridurre ad una delle due forme:

$$ax + b > 0 \qquad \text{ovvero} \qquad ax + b < 0 \;;$$

però basta considerare soltanto la prima forma, perché con un cambiamento di segni la seconda si riduce alla prima.

È ovvio che il coefficiente a non può essere nullo, e quindi due casi possono darsi o $a > 0$, o $a < 0$.

1.° Se è $a > 0$, dividendo la disequazione ridotta alla forma $ax > -b$ per a si ha

$$x > -\frac{b}{a} \;;$$

2.° Se $a < 0$, dividendo la disequazione $ax > -b$ per a si ha

$$x < -\frac{b}{a} \,.$$

Quindi: *La disequazione* $ax+b>0$ *è soddisfatta dagli infiniti valori di* x *maggiori di* $-\frac{b}{a}$ *se* a *è positivo; ed è soddisfatta dagli infiniti valori di* x *minori di* $-\frac{b}{a}$ *se* a *è negativo.*

Per quel che si è avvertito innanzi, nella disequazione $ax+b<0$ avviene il contrario; cioè essa è soddisfatta dai valori di $x<-\frac{b}{a}$ se a è positivo, e dai valori di $x>-\frac{b}{a}$ se a è negativo.

II. 1.° Ogni *condizione mista* di 1° grado si può ridurre alla forma

$$ax+b\geqq 0 \;;$$

ed essa è soddisfatta dai valori di x che soddisfano la disequazione

$$ax+b>0 \,,$$

e dalla radice dell'equazione

$$ax+b=0 \,.$$

Quindi se $x_1=-\frac{b}{a}$ è la radice dell'equazione $ax+b=0$, essa è soddisfatta dai valori

$$x\geqq x_1 \,, \qquad \text{se } a \text{ è positivo.}$$

e dai vaiori

$$x\leqq x_1 \,, \qquad \text{se } a \text{ è negativo.}$$

Cioè nel primo caso è soddisfatta da' valori dell'*intervallo infinito* a destra di x_1, compreso l'estremo sinistro, e nel secondo caso da' valori dell'*intervallo infinito* a sinistra di x_1 compreso l'estremo destro.

2.° Se la condizione mista è del tipo $|x-a|\leqq h$, cioè se occorre considerare solo il valore assoluto del primo membro, qualora sia $x-a$ positiva deve essere

$$x\leqq a+h \,,$$

e qualora sia $x-a$ negativa, deve essere $a-x \leq h$, cioè

$$x \geq a-h\ .$$

Dunque la data condizione mista equivale alle due seguenti:

$$a-h \leq x \leq a+h\ .$$

§ 3. — Disequazioni di 2.° grado ad una sola incognita.

12. Ogni disequazione di secondo grado ad una incognita può avere una delle due forme

$$ax^2+bx+c>0\ ,$$
$$ax^2+bx+c<0\ ,$$

con la condizione che sia $a \neq 0$. La seconda forma si riconduce alla prima cambiando i segni a tutti i termini della disequazione, e quindi possiamo occuparci soltanto della disequazione

$$ax^2+bx+c>0\ ,$$

essendo $a \neq 0$.

13. Tre casi si possono presentare: 1° che il discriminante del trinomio del primo membro sia positivo; 2° che sia nullo; 3° che sia negativo.

1.° Caso. $b^2-4ac>0$. Si sa che in questo caso le radici del trinomio $ax^2+bx+c=0$, sono reali e distinte: chiamando con x_1 ed x_2 rispettivamente la minore e la maggiore delle radici dell'equazione, già si sa che *); se si sostituisce nel trinomio in luogo di x un numero esterno all'intervallo (x_1, x_2) si ottiene un risultato dello stesso segno di a; e se nel trinomio in luogo di x si sostituisce un numero interno all'intervallo (x_1, x_2) si ha un risultato del segno contrario ad a.

Dunque: se è $a>0$, le soluzioni della disequazione sono date da tutti i valori esterni all'intervallo (x_1, x_2), cioè minori di x_1 e maggiori di x_2; e se è $a<0$, le soluzioni della dise-

*) Cfr. *Aritmetica ed Algebra*, Cap. XII, n. 21.

quazione sono date da tutti i numeri dell'intervallo (x_1, x_2), esclusi gli estremi.

2.° CASO. $b^2 - 4ac = 0$ Chiamando con x_1 il valore delle due radici eguali della equazione

$$ax^2 + bx + c = 0 ,$$

giá si sa che *): se si sostituisce nel trinomio in luogo di x un numero diverso da x_1 il risultato è sempre dello stesso segno di a. Dunque: se è $a > 0$ la disequazione sarà soddisfatta da tutti i valori di x diversi da x_1; e se è $a < 0$ la disequazione non è soddisfatta da alcun valore di x.

3.° CASO. $b^2 - 4ac < 0$. Si sa che in questo caso, se si sostituisce nel trinomio in luogo di x un numero qualunque, il trinomio assume sempre un valore dello stesso segno di a. Dunque: se è $a > 0$ qualunque numero soddisfa alla disequazione; e se è $a < 0$ nessun numero la soddisfa.

14. La *condizione mista* di 2° grado

$$ax^2 + bx + c \geqq 0$$

è soddisfatta dai valori di x che soddisfano la disequazione

$$ax^2 + bx + c > 0$$

e dalle radici delle equazioni

$$ax^2 + bx + c = 0 ;$$

e perciò: se $b^2 - 4ac > 0$ ed a è anche positivo; essa è soddisfatta da $x \leqq x_1$ e da $x \geqq x_2$;

e se a è negativo, è soddisfatta qualora sia

$$x_1 \leqq x \leqq x_2 .$$

Se $b^2 - 4ac = 0$, essa è soddisfatta da qualunque numero reale se $a > 0$, e soltanto da $x = x_1$ se $a < 0$.

Se, finalmente, $b^2 - 4ac < 0$, essa è soddisfatta pure da qualunque numero reale se $a > 0$, e da nessuno se $a < 0$.

15. Riassumendo ciò che è detto precedentemente si ha il seguente quadro delle soluzioni delle disequazioni e delle condizioni miste di secondo grado.

---

*) Cfr. *Aritm. ed Algebra,* Cap. XII, n. **19.** e **20.**

discriminante	coefficiente del 1° termine	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqq 0$
1° Caso $b^2-4ac>0$	$a>0$	$x<x_1 \quad x>x_2$	$x\leqq x_1 \quad x\geqq x_2$
	$a<0$	$x_1<x<x_2$	$x_1\leqq x\leqq x_2$
2° Caso $b^2-4ac=0$	$a>0$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	x qualunque
	$a<0$	nessuna soluz.	$x=-\frac{b}{2a}$
3° Caso $b^2-4ac<0$	$a>0$	x qualunque	x qualunque
	$a<0$	nessuna soluz.	nessuna soluz.

16. Esempii. 1.° Si abbia a risolvere la disequazione

$$2+3x>5x+7\ ;$$

riducendola alla forma tipica si ha

$$-2x>5$$

e quindi

$$x<-\frac{5}{2}\ ,$$

e perciò essa è soddisfatta da tutti i numeri $<-\frac{5}{2}$. Analogo risultato si ha se si riduce l'equazione con un cambiamento di segno alla forma $2x<-5$.

2.° Si voglia risolvere la disequazione

$$2x-3>\sqrt[3]{8x^3-36x^2+34x+33}\ .$$

Pel teor. 5° basta risolvere la disequazione che risulta elevando a cubo la data disequazione.

Elevando a cubo si ha

$$8x^3-36x^2+54x-27>8x^3-36x^2+34x+33$$

e riducendo successivamente

$$54x - 27 > 34x + 33 ,$$
$$20x > 60 ,$$
$$x > 3 ,$$

Dunque anche la data disequazione è soddisfatta dai valori di x maggiori di 3.

3.° Si voglia risolvere la disequazione

$$x + 4 > \sqrt[3]{x^3 + 15x + 46} .$$

Elevando a cubo e riducendo si ha,

$$12x^2 + 33x + 18 > 0 ,$$

ovvero
$$4x^2 + 11x + 6 > 0 .$$

Essendo -2 e $-\frac{3}{4}$ le radici del trinomio del primo membro, la soprascritta disequazione, e quindi anche la data disequazione, è soddisfatta, pel teor. 5°, dai valori seguenti

$$x < -2 \quad , \quad x > -\frac{3}{4} ,$$

cioè dai valori esterni all' intervallo $\left(-2 , -\frac{3}{4}\right)$.

4.° Si voglia risolvere la disequazioue

$$2x + 3 > \sqrt{4x^2 - 2x - 6} .$$

Pel teor. 6° le soluzioni di questa disequazione sono quelle del sistema:

$$(2x + 3)^2 > 4x^2 - 2x - 6 ,$$
$$2x + 3 > 0 ,$$
$$4x^2 - 2x - 6 \geqq 0 .$$

Dalla prima disequazione si ha

$$4x^2 + 12x + 9 > 4x^2 - 2x - 6$$

e riducendo

$$14x > -15$$

e quindi $x > -\frac{15}{14}$ rappresenta tutti i valori che soddisfano il quadrato della data disequazione. La seconda è soddisfatta da $x > -\frac{3}{2}$. La terza si riduce a

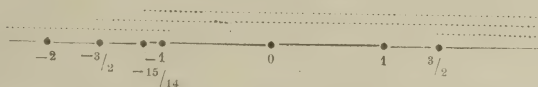
$$2x^2 - x - 3 \geqq 0$$

e questa è soddisfatta dai valori numerici esterni all'intervallo delle radici del trinomio, compresi gli estremi, che sono $-1, +\frac{3}{2}$.

Tenendo conto delle condizioni $x > -\frac{3}{2}$, $x > -\frac{15}{14}$, $x \geqq \frac{3}{2}$, risulta che sono soluzioni della data disequazione i valori di $x \geqq \frac{3}{2}$.

Tenendo poi conto delle condizioni $x > -\frac{3}{2}$, $x > -\frac{15}{14}$, $x \leqq -1$, risulta che i valori che soddisfano alle diseguaglianze $-\frac{15}{14} < x \leqq -1$ sono pure soluzioni della data disequazione.

Tutto ciò risulta evidente dalla figura

$-2 \quad -3/2 \quad -1 \quad -15/14 \quad 0 \quad 1 \quad 3/2$

dove gl'intervalli che soddisfano la data disequazione sono coperti con tre linee di trattini.

5.º Si voglia risolvere la disequazione:

$$3x + 5 > \sqrt{9x^2 - 6x - 8}\,.$$

Pel teor. 6º bisogna risolvere il sistema:

$$(3x + 5)^2 > 9x^2 - 6x - 8\;,$$
$$3x + 5 > 0\;,$$
$$9x^2 - 6x - 8 \geqq 0\;.$$

La prima disequazione ci dà

$$12x > -11\;, \qquad \text{donde} \qquad x > -\frac{11}{12}\,.$$

Per essere $9x^2 - 6y - 8 \geqq 0$ si deve avere

$$x \leqq -\frac{2}{3} \qquad x \geqq \frac{4}{3}$$

e per essere

$$3x + 5 > 0 \quad \text{si deve avere} \quad x > -\frac{5}{3}\,.$$

Quindi, riassumendo, si hanno soluzioni per i valori seguenti di x:

$$-\frac{11}{12} < x \leqq -\frac{2}{3}\;, \quad x \geqq \frac{4}{3}\,.$$

Tutto ciò risulta chiaro dalla seguente rappresentazione in cui

$-5/3$ -1 $-11/12$ $-2/3$ 0 $4/3$

gl' intervalli che soddisfano la disequazione sono coperti tre volte dalle linee di trattini.

6.° Si voglia risolvere la disequazione

$$2x + 3 < \sqrt{4x^2 - 2x - 6} \, .$$

Pel teor. 7° occorre che sia:

$$2x + 3 < 0 \quad , \quad 4x^2 - 2x - 6 \geq 0$$

ed inoltre

$$2x + 3 \geq 0 \quad , \quad (2x + 3)^2 < 4x^2 - 2x - 6 \, .$$

Per essere $2x + 3 < 0$ deve essere $x < -\frac{3}{2}$; per essere il radicando ≥ 0 deve essere

$$x \leq -1 \qquad , \qquad x \geq \frac{3}{2} \, .$$

Inoltre pel secondo sistema si ha

$$4x^2 + 12x + 9 < 4x^2 - 2x - 6$$

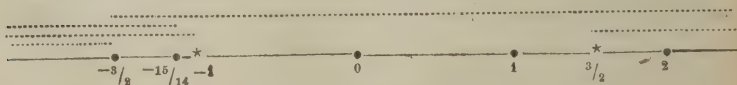
e riducendo

$$14x < -15 \, ,$$

da cui si ha $x < -\frac{15}{14}$, mentre per essere $2x + 3 \geq 0$ deve essere $x \geq -\frac{3}{2}$.

Dunque le soluzioni sono date da $x < -\frac{3}{2}$, pel primo sistema; e sono quelle date da $x < -\frac{15}{14}$ ed $x \geq -\frac{3}{2}$, cioè dai valori di x compresi fra $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{15}{14}$, pel secondo sistema. Quindi, riunendo, si hanno soluzioni per tutti i valori di $x < -\frac{15}{14}$.

La rappresentazione seguente spiega gl' intervalli che soddisfan o

$-3/2$ $-15/14$ -1 0 1 $3/2$ 2

la disequazione data.

7.° Si voglia risolvere la disequazione

$$3x+2<\sqrt{6x^2+x-15} \; .$$

Applicando il teor. 7.° deve essere

$$\begin{cases} 3x+2<0 \\ 6x^2+x-15 \geqq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x<-\dfrac{2}{3} \\ x \leqq -\dfrac{5}{3} \; , \quad x \geqq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

ed inoltre

$$3x+2 \geqq 0 \qquad (3x+2)^2 < 6x^2+x-15 \; .$$

Le due ultime disequazioni non ammettono alcuna soluzione, le prime sono soddisfatte da $x \leqq -\frac{5}{3}$; dunque la data disequazione è soddisfatta da valori di $x \leqq -\frac{5}{3}$.

§ 4. — Disequazioni fratte.

17. *Risolvere la disequazione* $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}>0$. Dalla osservazione fatta nel n. **6** risulta che questa disequazione è equivalente all'altra $(ax+b)(a'x+b')>0$ e che entrambe sono soddisfatte dalle soluzioni comuni ai due sistemi di disequazioni $\begin{cases} ax+b>0 \\ a'x+b'>0 \end{cases}$; $\begin{cases} ax+b<0 \\ a'x+b'<0 \end{cases}$.

Ma è più semplice osservare che $(ax+b)(a'x+b')>0$ è una disequazione di 2^0 grado, e si può risolverla così direttamente, e dire che è soddisfatta dai valori esterni o dai valori interni alle radici $-\dfrac{b}{a}, -\dfrac{b'}{a'}$ secondo che il coeff. di x^2 risulti positivo o negativo.

ESEMPIO. Si debba risolvere la disequazione

$$\frac{3x-15}{7x+42}>0 \; .$$

La disequazione data equivale alla disequazione di 2^0 grado

$$(3x-15)(7x+42)>0$$

e siccome le radici del primo membro sono $x=5$, $x=-6$, ed il coefficiente del termine a secondo grado è positivo, si ha che tutte le soluzioni della data disequazione sono date dai valori esterni all'intervallo $(-6, 5)$, esclusi gli estremi.

Volendola risolvere indipendentemente dalle disequazioni di 2° grado, basterà risolvere le due disequazioni

$$3x-15>0 \quad , \quad 7x+42>0$$

e le altre due

$$3x-15<0 \quad , \quad 7x+42<0 \, .$$

Dal primo sistema si ha

$$x>5 \quad , \quad x>-6 \, ,$$

quindi esso è soddisfatto da $x>5$.

Dal secondo sistema si ha $x<5$, $x<-6$, e quindi esso è soddisfatto da $x<-6$; e con ciò si ritrovano le soluzioni dette sopra.

18. In particolare si possono presentare le condizioni miste

$$\frac{x-a}{x-b}\leqq 0 \quad , \quad \frac{x-a}{x-b}\geqq 0 \, .$$

Supporremo, per fissare le idee, che sia $a<b$, però il risultato sarà lo stesso anche se sia $a>b$.

La prima condizione mista $\frac{x-a}{x-b}\leqq 0$ si scompone in due condizioni $\frac{x-a}{x-b}<0$, $\frac{x-a}{x-b}=0$. La prima è soddisfatta dai valori interni all'intervallo (a, b), la seconda soltanto da $x=a$.

In complesso la condizione mista è soddisfatta dai valori interni all'intervallo (a, b) e dall'estremo a.

La seconda condizione mista $\frac{x-a}{x-b}\geqq 0$ si scompone in due condizioni $\frac{x-a}{x-b}>0$, $\frac{x-a}{x-b}=0$. La prima è soddisfatta dai valori esterni all'intervallo (a, b), la seconda dal solo valore $x=a$.

Riassumendo: *la condizione mista* $\frac{\mathrm{x}-\mathrm{a}}{\mathrm{x}-\mathrm{b}}\leqq 0$ *rappresenta l'intervallo* (a, b) *compreso l'estremo segnato nel nume-*

ratore; invece $\dfrac{x-a}{x-b} \geqq 0$ *rappresenta i valori esterni all'intervallo* (a, b) *compreso sempre l'estremo segnato nel numeratore. Nell'uno e nell'altro caso la condizione mista nulla dice in riguardo all'estremo* b *del denominatore.*

19. *Risolvere la disequazione*

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} > 0 \, .$$

Questa disequazione è soddisfatta dalle soluzioni comuni ai due sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} a^2+bx+c>0 \\ a'^2+b'x+c'>0 \end{cases} , \quad \begin{cases} ax^2+bx+c<0 \\ a'x^2+b'x+c'<0 \end{cases} .$$

20. Esempii. 1.° Sia da risolvere la disequazione

$$\frac{3x^2+5x-12}{8x^2-2x-3} > 0 \, .$$

Occorre risolvere i sistemi

$$\begin{cases} 3x^2+5x-12>0 \\ 8x^2-2x-3>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2+5x-12<0 \\ 8x^2+2x-3<0 \end{cases} .$$

Indicando con $x_1 x_2$, $x_3 x_4$ le radici dei trinomii dati, esse sono

$$x_1 = -3 \quad , \quad x_2 = \frac{4}{3} \quad ; \quad x_3 = -\frac{1}{2} \quad , \quad x_4 = \frac{3}{4} \, .$$

Cosicché pel primo sistema la prima disequazione è soddisfatta dai valori esterni all'intervallo $\left(-3 \, , \frac{4}{3}\right)$, e la seconda dise-

−3 −2 −1 −1/2 0 3/4 1 4/3

quazione dai valori esterni all'intervallo $\left(-\frac{1}{2} \, , \frac{3}{4}\right)$; quindi entrambe sono seddisfatte dai valori esterni all'intervallo $\left(-3 \, , \frac{4}{3}\right)$ esclusi gli estremi di esso.

Pel secondo sistema, la prima disequazione è soddisfatta dai

$-3 \quad -2 \quad -1 \quad -1/_2 \quad 0 \quad 3/_4 \quad 1 \quad 4/_3$

valori interni all'intervallo $\left(-3, \frac{4}{3}\right)$, la seconda dai valori interni all'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; quindi entrambe sono soddisfatte dai valori interni all'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, esclusi sempre gli estremi.

Perciò la disequazione data è soddisfatta da

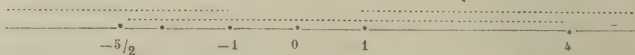
$$x < -3 \quad , \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4} \quad , \quad x > \frac{4}{3} \, .$$

Tutto ciò è chiaramente espresso dalle due figure qui sopra intercalate, poiché gl'intervalli che soddisfano la due equazioni del sistema sono quelli coperti due volte dalle linee tratteggiate.

2.° *Risolvere la disequazione.* $\frac{2x^2 - 3x - 20}{x^2 - 1} < 0$.

Per essa occorre risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 20 < 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} 2x^2 - 3x - 20 > 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} .$$

Le radici del numeratore sono $-\frac{5}{2}$ e 4, quelle del denominatore sono $-1, 1$, e queste si succedono ordinatamente come nelle figure qui intercalate.

$-5/_2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 4$

Pel primo sistema, la prima disequazione è soddisfatta dai valori interni all'intervallo $(-5/_2, 4)$, la seconda dai valori esterni all'intervallo $(-1, 1)$; quindi entrambe sono soddisfatte dai valori degli intorvalli $(-5/_2, -1)$ e $(1, 4)$, esclusi gli estremi.

Pel secondo sistema, la prima disequazione è soddisfatta

$-5/_2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 4$

dai valori esterni all'intervollo $(-5/_2, 4)$, la seconda dai valori interni all'intervallo $(-1, 1)$, quindi nessuno valore di x soddisfa entrambe.

Perciò la disequazione data è soddisfatta da

$$-{}^5/_2 < x < 1 \qquad \text{e da} \qquad 1 < x < 4 .$$

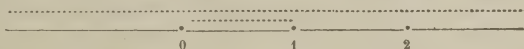
3.° *Risolvere la disequazione* $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x} < 0$.

Unica radice del numeratore è 2, e le radici del numeratore sono 0, 1 ed occorre risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} (x-2)^2 < 0 \\ x(x-1) > 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} (x-2)^2 > 0 \\ x(x-1) < 0 \end{cases} .$$

Nel primo sistema la prima equazione non è soddisfatta da alcun valore di x, quindi per esso non si ha alcuna soluzione.

Pel secondo sistema, la prima equazione è soddisfatta da tutti i valori di x, eccetto che da $x = 2$, la seconda è soddisfatta sol-

0 1 2

tanto dai valori interni all'intervallo $(0, 1)$; quindi il sistema, e anche la data disequazione, sono soddisfatti soltanto da

$$0 < x < 1 .$$

Si può anche abbreviare dicendo: poiché il numeratore è un quadrato, esso è sempre positivo, quindi per risolvere la disequazione occorre che sia negativo il denominatore $x(x-1) < 0$. Ecc.

21. Se si fosse moltiplicata tutta la disequazione del n. **19** per $(a'x^2 + b'x + c')^2$ si sarebbe ottenuta la disequazione

$$(ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c') > 0$$

la quale è soddisfatta dalle soluzioni degli stessi sistemi considerati nel n. **19**, e perciò essa è equivalente alla disequazione frazionaria considerata sopra.

Ciò mostra che senza difficoltà si possono estendere i metodi esposti *anche alle risoluzioni* di disequazioni di grado superiore, purché queste si sappiano scomporre in fattori di 1° o di 2° grado.

Così p. es., volendo risolvere la disequazione $x^4 - 13x^2 + 36 > 0$ si scomporrà il primo membro in fattori e si dovrà avere

$$(x^2 - 9)(x^2 - 4) > 0 .$$

Ciò importa che siano soddisfatti i sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - 9 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases} .$$

Pel primo sistema la disequazione data è soddisfatta dai valori esterni all'intervallo $(-3, 3)$ e pel secondo dai valori interni all'intervallo $(-2, 2)$, esclusi gli estremi, cioè da

$$x < -3 \quad , \quad -2 < x < 2 \quad , \quad x > 3 .$$

In questo esempio, considerando l'equazione data come di 2° grado in x^2, si poteva direttamente trovare che essa è soddisfatta dai valori di x^2 esterni all'intervallo $(4, 9)$ e poi seguitare come sopra.

22. Vi sono dei casi in cui delle condizioni speciali semplificano il problema come si può vedere nel seguente

Esempio. *Risolvere la disequazione*

$$a^4 - 2a^2b^2 - 8b^4 > 0 ,$$

supposto che sia $0 < b < a$.

Dividendo per b^4 la data disequazione si ha

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 - 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 8 > 0 ,$$

la quale è soddisfatta da

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 < -2 \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 > 4 ;$$

siccome però $\frac{a}{b}$ deve essere reale, la prima condizione non può avverarsi; ma deve essere per ipotesi anche $\frac{a}{b} > 1$, dunque resta soltanto $\left(\frac{a}{b}\right)^2 > 4$, e poiché $\frac{a}{b}$ è positivo, ciò riducesi ad $\frac{a}{b} > 2$, ovvero $a > 2b$.

23. Applicazioni alle equazioni razionali. La risoluzione delle equazioni contenenti radicali può essere avvan-

taggiata dalla risoluzione delle disequazioni, nel senso di scartare anticipatamente le radici estranee che potrebbero introdursi con l'elevazione a potenza o di risparmiare la verifica delle radici trovate.

Basterà darne una prova col seguente

Esempio *Risolvere l'equazione*

$$\sqrt{m^2+a^2}=2m-3\sqrt{m^2-a^2}$$

supposto che debba essere $0<a<m$.

Il primo membro deve essere positivo, quindi occorre che sia

$$2m>3\sqrt{m^2-a^2}\ ,$$

ovvero

$$4m^2>9m^2-9a^2$$

donde si deduce

$$\frac{m}{a}<\frac{3}{\sqrt{5}}$$

e siccome il rapporto $\frac{m}{a}$ per ipotesi deve essere >1, si ha che deve essere

$$1<\frac{m}{a}<\frac{3}{\sqrt{5}}\ .$$

Elevando a quadrato la data equazione si ha

$$6m\sqrt{m^2-a^2}=6m^2-5a^2 \qquad (a)$$

e anche qui, essendo il primo membro positivo, deve essere

$$6m^2>5a^2\ ,$$

quindi

$$\frac{m^2}{a^2}>\frac{5}{6}\ ,$$

la quale condizione è inclusa nelle due precedenti, che danno

$$1<\frac{m^2}{a^2}<\frac{9}{5}\ .$$

Elevando a quadrato la equazione (a) si ha successivamente

$$24a^2m^2=25a^4\ ,\quad \frac{m^2}{a^2}=\frac{25}{24}\ ,\quad \frac{m}{a}=\frac{5}{2\sqrt{6}}\ .$$

Questo valore di $\frac{m}{a}$ è compreso nell'intervallo $\left(1, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ e quindi esso risolve certamente l'equazione data.

24. In generale però data l'equazione $P \pm \sqrt{Q} = 0$ ove P sia di primo grado, Q di secondo grado rispetto all'incognita x, e supposto che sia x_1 una radice dell'equazione $P^2 = Q$, ottenuta dall'elevazione a quadrato della equazione data, per riconoscere se x_1 è radice di $P - \sqrt{Q} = 0$ o di $P + \sqrt{Q} = 0$, basterà sostituire il valore di x_1 in P e vedere se il valore P_1 che risulta è positivo o negativo. Nel primo caso x_1 è radice di $P - \sqrt{Q} = 0$, nel secondo x_1 è radice di $P + \sqrt{Q} = 0$.

25. Ed analogamente, data l'equazione $\pm\sqrt{P} \pm \sqrt{Q} = a$, ove P e Q sono di 1° grado rispetto all'incognita x, ed a è costante positiva, e supposto che sia x_1 una radice dell'equazione $(P - Q - a^2)^2 = 4a^2Q$, ottenuta elevando a quadrato l'equazione $\pm\sqrt{P} = a \mp \sqrt{Q}$ e poi di nuovo a quadrato l'equazione ottenuta, si può riconoscere con breve ispezione la radice x_1 a quale delle tre equazioni seguenti

$$+\sqrt{P} - \sqrt{Q} = a \ (1), \quad +\sqrt{P} + \sqrt{Q} = a \ (2), \quad -\sqrt{P} + \sqrt{Q} = a \ (3)$$

appartenga (dovendosi escludere $-\sqrt{P} - \sqrt{Q} = a$, che è assurda).

Indicando con P_1 e Q_1 i valori che assumono P e Q per $x = x_1$, ed osservando che dalla prima elevazione a quadrato si aveva $P - Q - a^2 = \pm 2a\sqrt{Q}$; se $P_1 - Q_1 - a^2 > 0$, x_1 è radice dell'equazione che dà luogo a $P - Q - a^2 = +2a\sqrt{Q}$ cioè della equazione (1).

Se invece $P_1 - Q_1 - a < 0$, x_1 può essere radice tanto dalla (2) che della (3), poiché proviene da $P_1 = \left(a - \sqrt{Q_1}\right)^2$; ma si può osservare che dall'equazione $P_1 - Q_1 - a^2 = -2a\sqrt{Q_1}$ si deduce $\sqrt{Q_1} = \frac{P_1 - Q_1 - a^2}{-2a}$, e questo valore sostituito in $\pm\sqrt{P_1} = a - \sqrt{Q_1}$ dà

$$\pm\sqrt{P_1} = \frac{P_1 - Q_1 + a^2}{2a}$$

e quindi il segno del secondo membro fa conoscere quello del

primo membro e perciò a quale delle due equazioni (2) o (3) la x_1 appartiene. Perciò si conchiude che:

Se $P_1 - Q_1 > a^2$ x_1 *è radice di* (1);
se $-a^2 < P_1 - Q_1 < a^2$ x_1 *è radice di* (2);
se $P_1 - Q_1 < -a^2$ *è radice di* (3) *).

Applicando questa regola all'esempio del n. **23** si conchiude immediatamente che $m^2 = \frac{25}{24}a^2$ è radice della data equazione.

ESEMPIO. $\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1} = 2$ con i soliti passaggi diviene $x^2 - 42x + 41 = 0$ di cui le radici sono 1 e 41.

Applicando la regola suddetta si trova subito che

$$1 \text{ è radice di } \sqrt{\quad} + \sqrt{\quad} = 2$$
$$41 \text{ è radice di } \sqrt{\quad} - \sqrt{\quad} = 2\ .$$

Esercizi.

DISEQUAZIONI DI 1° GRADO.

— Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $(3x+1)^2 - 8 < (3x-1)^2$.
2. $(10x-1)^2 - (6x-1)^2 \leqq 4(4x-1)^2$.
3. $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}\left(x+\frac{1}{5}\right) < 0$.
4. $\frac{x-2}{3} - \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2-5x}{3}\right) \leqq \frac{x-9}{2} - \frac{8}{15}$.
5. $x + a + b < ax - bx$, per a e b positivi. (Occorre esaminare diversi casi secondochè è $a \lesseqgtr b+1$).
6. $\frac{x+m}{m+n} - 2 > \frac{m-x}{m-n}$ per m ed n positivi. (Occorre distinguere se è $m > n$ o $m < n$, non potendo essere $m = n$).

SISTEMI DI DISEQUAZIONI.

— Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:

7. $\begin{cases} 3x - 6 > x + 5 \\ 2(x-2) > x + 5 \end{cases}$.
8. $\begin{cases} \frac{5}{6}(2x-3) > \frac{3}{5}x + \frac{7}{3} \\ 17(x-7) > 51 \end{cases}$.
9. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x < m \\ \frac{1}{4}x > \frac{1}{6}x + m \end{cases}$. (Si distingue se m è positivo, negativo o nullo)

*) Cor e Riemann, Traité d'Algèbre élémentaire, p. 122, Paris.

10. $\begin{cases} 18x+5>3(4-x) \\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{x}{4}+x>23 \\ x+\dfrac{10x}{9}<\dfrac{5x+30}{3} \end{cases}$ R. $20<x<22+\dfrac{1}{2}$.

DISEQUAZIONI DI 2° GRADO.

— Risolvere le seguenti disequazioni di 2° grado:

11. $6x^2+7x+2>0$.

12. $-15x^2+81x-15>0$.

13. $2x^2-2x+11\geqq 0$.

14. $5x^2-7x+3<0$.

15. $-x^2+8x+4\leqq 0$.

16. $x^2+16x-80\leqq 0$.

17. $(3x-2)^2+3>5x-(2x-1)^2$. (R. $x<\dfrac{8}{13}$, $x>1$).

18. $\dfrac{7}{10}x+\dfrac{1}{5}(2x+5)^2>\dfrac{1}{3}(x-4)^2+\dfrac{1}{3}(x-7)$.

19. Determinare per quali valori interi della x è soddisfatta la disequazione $(x+3)^2-2(x+15)+(3x+1)^2>(2x+2)^2+7(x+1)(x+2)$. (R. $x=3$ e 4).

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI (ai radicali si attribuisca il segno che precede).

— Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

20. $\sqrt{2x-3}<\sqrt{3x-2}$ Tenuto conto della realtà si elevi a quadrato.

21. $\sqrt{x-1}<\sqrt{2x-3}$ » »

22. $\sqrt{x-2}<\sqrt{x-1}$ » »

23. $\sqrt{2-3x+x^2}>\sqrt{6-x-x^2}$ » »

24. $\sqrt[3]{x-1}<\dfrac{1}{2}$.

25. $\sqrt[3]{x^2-7x+8}<5$.

26. $x+3<\sqrt[3]{x^3+7x+2}$.

27. $\sqrt{x-2}<\dfrac{1}{3}$. (R. $2\leqq x<\dfrac{7}{3}$).

28. $\sqrt{x-4}<7$. (R. $4\leqq x<53$).

29. $3x-5>\sqrt{9x^2+7x+3}$. R. Nessuna soluzione.

30. $3x-4>\sqrt{x^2-5x+6}+2x-3$. (R. $\dfrac{5}{3}<x\leqq 2$, $x\geqq 3$).

31. $\sqrt{m^2+5mx+4x^2}<2x+3m$.

(R. $-\dfrac{8}{7}m<x\leqq -m$, $x\geqq -\dfrac{m}{4}$, se m è pos.; nessuna soluz., se m è neg.; nessuna soluz. se m è zero).

32. $\begin{cases} 3x-\sqrt{7}<\sqrt{9x^2+x-2-6x\sqrt{7}} . & \text{(R. } x_2\leqq x<9\text{)}. \\ 3x-\sqrt{7}<\sqrt{9x^2+x-2-6x\sqrt{7}} & \text{(R. } x\leqq x_1,\ x>9\text{)}. \end{cases}$

33. $2\sqrt{x^3}>\sqrt{4(x-1)^3+12x^2-7}$.

34. $3>\sqrt{3+1}+\sqrt{x+2}$ (Si terrà conto prima della realtà dei radicali

che importa $x \geqq -1$, poi si applica il teor. 6⁰ al suo quadrato e si trova $-1 \leqq x < \frac{7}{9}$).

35. $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-3} + \sqrt{x-3} > 0$ (Si porti il secondo radicale al 2⁰ membro, si tenga conto della condizione di realtà, indi si elevi a quadrato e si applichi il teor. 7.⁰

36. $x + 5 < \sqrt{x^2-1}$. $\left(\text{R. } x < -\frac{13}{5}\right)$.

37. $\sqrt{\frac{2x^2-3}{2}} > x + 5$.

38. $2x-1 < \sqrt{3x^2-2x}$. R. $x \leqq 0$.

39. $3x-4 < \sqrt{10x^2-12x+7}$. (R. È soddisfatta da qualunque valore di x).

40. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} > 1$. (Si vegga l'avvertenza all'eserc. 34).

41. Determinare per quali valori interi di x è soddisfatta la disequazione

$$x + \sqrt{\frac{4x^2-3x-1}{5}} > \frac{1}{2} \qquad (\text{R. } x \geqq 1).$$

Disequazioni fratte. Risolvere le seguenti disequazioni:

42. $\frac{x-3}{x-5} > 0$.

43. $\frac{x+2}{x+8} < 0$.

44. $\frac{x-11}{x+4} \geqq 0$.

45. $\frac{x-6}{x+8} \leqq 0$.

46. $\frac{x^2-1}{x-2} > 0$.

47. $\frac{x-2}{x^2+4x+2} < 0$.

48. $\frac{x^2-16}{x^2-9} \leqq 0$.

49. $\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x-10} > 0$.

50. $\frac{x^2-6x+9}{x^2-7x+10} > 0$.

51. $\frac{x}{x+1} + \frac{18}{5(x-1)} > 3 - \frac{15}{x^2-1}$ (R. $-\frac{27}{10} < x < -1$, $1 < x < 4$).

52. $\frac{x(x+4)}{4x^2-1} - \frac{1}{2x-1} - \frac{2}{2x+1} < 0$. $\left(\text{R. } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$.

53. $\frac{1}{3}(2x-1) - \frac{3}{x-8} < 0$. $\left[\text{R. } 8 < x < \frac{1}{4}(17+3\sqrt{33}),\ x < \frac{1}{4}(17-3\sqrt{33})\right]$.

54. $\frac{1}{3x+11} - \frac{1}{3x-11} > -\frac{22}{23}$ $\left(\text{R. } x < -4,\ -\frac{11}{3} < x < \frac{11}{3},\ x > 4\right)$.

55. $\frac{2-\sqrt{x^2-8x}}{x+1} > 0$. (Per questa disequazione occorre risolvere i si-

stemi $\begin{cases} 2 - \sqrt{x^2 - 3x} > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2 - \sqrt{x^2 - 3x} < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$;

pel primo si ha $\begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ -1 < x \leq 0 \end{cases}$; pel secondo si ha $x < -1$, quindi la disequazione è soddisfatta da $x \leq 0$ eccetto il valore -1, e da $3 \leq x < 4$). (**Bassi**, *Esercizii e problemi di Alg. complem.* Vol. I, p. 75).

56. $\dfrac{x + a}{\sqrt{x^2 + a^2}} > \dfrac{x + b}{\sqrt{x^2 + b^2}}$ per $a > b > 0$. (Passando a primo membro ed eseguendo la sottrazione si vede che

$$\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$$

è sempre positivo per qualunque valore di x e quindi il problema si riduce a risolvere la disequazione

$$(x + a)\sqrt{x^2 + b^2} - (x + b)\sqrt{x^2 + a^2} > 0$$

e si trova che deve essere $x > \sqrt{ab}$, $x < 0$). (Bassi, l. c., p. 76-77).

— Risolvere le disequazioni seguenti di grado maggiore di 2.

57. $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$.

58. $x^4 - 17x^2 + 60 > 0$.

59. $a^4 - 6a^2b^2 + b^4 > 0$ per $a > b > 0$. (R. $\dfrac{a}{b} > 1 + \sqrt{2}$).

60. $2a^4 - 9a^2b^2 + 4b^4 > 0$.

61. $x^3 - x^2 + 3x - 3 > 0$.

62. $x^4 - 3x^3 - 8x + 12x + 16 > 0$.

CAPITOLO QUARTO.

ANALISI INDETERMINATA DI 1° GRADO.

§ 1. — Una equazione a due incognite.

1. Si è già visto precedentemente (cfr. *Alg.* Cap. V, § 2 *), che un sistema di equazioni di 1° grado contenenti un numero di incognite maggiore del numero delle equazioni ammette sempre un numero infinito di soluzioni. Se però, nell'ipotesi che i coefficienti siano tutti numeri razionali, si pone la restrizione che le soluzioni debbano essere *intere* (cioè formate da numèri interi) oppure anche che esse debbano essere *intere e positive*, il sistema potrebbe anche non aver soluzioni, ed in generale il numero delle soluzioni è sempre ridotto.

ESEMPIO. *Trovare due numeri interi che hanno per somma 10.*

Deve essere

$$x+y=10\ , \qquad \text{quindi} \qquad x=10-y\ ,$$

e perciò ad ogni valore dato ad y si ha un valore corrispondente per x. Ma se si richiede che x ed y siano interi e positivi, ad y non si potranno dare che i valori

$$1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ ,\ 9$$

e quindi le soluzioni dell'equazione sono:

$$x=9\,,8\,,7\,,6\,,5\,,4\,,3\,,2\,,1\,,$$

$$y=1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9 \text{ **)}.$$

---

*) Si confronti pure *Aritm. ed Algebra*, Cap. IX, § 2.

**) I problemi di analisi indeterminata furono nell'antichità profondamente trattati da Diofanto nel 3° secolo dopo Cristo in un'opera di 13 libri dei quali soltanto 6 sono a noi pervenuti. In essi non è contenuta la risoluzione dell'equazione $ax+by=k$ in numeri interi, che costituisce il più elementare dei problemi Diofantei. La prima opera nella quale fu trattata sistematicamente questa teoria è di Bachet de Méziriac ed è intitolata *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* e fu pubblicata la prima volta nel 1612 a Lyon, ed altre volte in seguito; e di essa si è fatta un'ultima edizione non molto fedele nel 1905 (Parigi). La teoria è stata in seguito perfezionata da Euler e da Lagrange.

La teoria che si propone di risolvere in numeri interi, o in numeri interi e positivi, un sistema di m equazioni di 1° grado con $m+h$ incognite (per m ed $h>0$) dicesi *analisi indeterminata di 1° grado.*

Il caso più semplice è che sia $m=1$, $h=1$, ed allora si tratta di risolvere in numeri interi, o interi e positivi, l'equazione

$$ax+by=k, \qquad (1)$$

ove a, b, k si possono sempre supporre interi.

Per $m=1$, $h>1$, si ha da risolvere l'equazione

$$ax+by+cz+\cdots=k. \qquad (2)$$

Nel caso di $m>1$, si ha un sistema

$$M_1=0\ ,\ M_2=0\ ,\ M_3=0\ ,\ \ldots\ ,\ M_m=0\ ;$$

di m equazioni fra le quali si possono eliminare $m-1$ incognite, in seguito a che si sarà ridotti a risolvere una sola equazione contenente $k+1$ incognite. Quindi il problema si riduce sempre alla risoluzione di equazioni del tipo (1) o (2).

2. Per la risoluzione dell'equazione

$$ax+by=k$$

si può osservare che, se a, b, k hanno un divisore comune d, questo si può sopprimere, perché la nuova equazione che risulta è equivalente all'antica. Però:

Quando a, b, k *siano già primi fra loro, affinché la equazione abbia soluzioni intere è necessario e sufficiente che anche* a *e* b *siano numeri primi fra loro.*

Infatti, la condizione suddetta è *necessaria*, perché, se a e b hanno un divisore comune c, dividendo per c l'equazione, e supposto che i quozienti siano rispettivamente a' e b', si avrebbe

$$a'x+b'y=\frac{k}{c},$$

eguaglianza che non può mai rendersi identica, per valori interi di x ed y, essendo $\frac{k}{c}$ frazionario.

Dippiù la detta condizione è *sufficiente*, perché, se si ri-

solve l'equazione rispetto ad x, si ha

$$x = \frac{k - by}{a},$$

e dando ad y i valori $0, 1, 2, \ldots, (a-2), (a-1)$ si hanno per x i valori corrispondenti

$$\frac{k}{a}, \frac{k-b}{a}, \frac{k-2b}{a}, \ldots, \frac{k-(a-2)b}{a}, \frac{k-(a-1)b}{a},$$

dei quali si mostrerà che uno solo è certamente intero.

Per far risultare ciò indichiamo con q e q' gl'interi contenuti in due delle precedenti frazioni,

$$\frac{k-mb}{a}, \frac{k-nb}{a};$$

e supponiamo che, eseguite le divisioni accennate, esse possano dare lo stesso resto r, si avrà

$$k - mb = qa + r \quad , \quad k - nb = q'a + r,$$

d'onde sottraendo

$$b(n-m) = (q - q')a.$$

Poichè il numero a divide il secondo membro, deve essere divisore anche del primo: ma esso è per ipotesi primo con b, dunque deve essere divisore di $n - m$, e ciò è impossibile, perchè n ed m sono entrambi minori di a, ed anche la loro differenza è minore di a.

Ciò posto, se tutte le divisioni accennate da quelle frazioni, che sono in numero di a, debbono dare resti differenti, dovranno dare per resti, in un ordine qualsiasi, necessariamente i numeri

$$a-1, a-2, a-3, \ldots, 3, 2, 1, 0;$$

quella che dà resto 0 è certamente un numero intero. *).

Se questa frazione è data da $y = \beta$, e sia α il suo valore, la coppia α, β costituisce una soluzione dell'equazione data.

---

*) Si confronti *Aritm. ed Algebra*. Cap. IV, 15.

3. *Allorquando un' equazione* ax + by = k *ha una soluzione* α, β *in numeri interi, essa ne ha infinite.*

Infatti dall'equazione data si sottragga l'identità

$$a\alpha + b\beta = k$$

e si ha

$$a(x-\alpha) + b(y-\beta) = 0 \text{ *)},$$

e quindi

$$x - \alpha = -\frac{b}{a}(y-\beta),$$

$$x = \alpha - \frac{b}{a}(y-\beta).$$

I valori interi per x si avranno scegliendo per y valori che rendono intera l'espressione $\frac{b(y-\beta)}{a}$, e poiché per ipotesi a è primo con b, deve essere $y-\beta$ multiplo di a, e se poniamo $\frac{y-\beta}{a} = t$, ove t sia un numero intero arbitrario, risulta

$$x = \alpha - bt,$$

$$y = \beta + at.$$

Da queste due formole per ogni valore intero (positivo, negativo o nullo) dato a t si ha una soluzione dell'equazione data, e quindi il numero delle soluzioni è infinito, e poiché dipende dai valori numerici che si possono dare ad un'unica variabile, questo numero dicesi *semplicemente infinito.*

Tutti i valori di x e i corrispondenti valori di y che danno le soluzioni dell'equazione data, costituiscono due progres-

---

*) Si può anche dire: Da questa equazione si ricava

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta} = -\frac{b}{a},$$

ed essendo $\frac{b}{a}$ una frazione irreducibile dev'essere (*Aritm. part. e gen.*, Cap. IV, 23)

$$x - \alpha = -bt$$

$$y - \beta = +at$$

dove t sia un intero qualunque, positivo o negativo, e quindi

$$x = \alpha - bt$$

$$y = \beta + at.$$

sioni aritmetiche, l'una di ragione $-b$, l'altra di ragione a, e sono le seguenti:

$$x = \ldots, \alpha+3b, \alpha+2b, \alpha+b, \alpha, \alpha-b, \alpha-2b, \alpha-3b, \ldots$$
$$y = \ldots, \beta-3a, \beta-2a, \beta-a, \beta, \beta+a, \beta+2a, \beta+3a, \ldots$$

Il problema dell'analisi indeterminata di 1° grado, per l'equazione $ax+by=k$, si riduce dunque alla ricerca di una sola soluzione, qualunque essa sia, poiché da essa si ricavano immediatamente tutte le altre.

4. L'equazione $ax+by=k$ si può scrivere $\frac{k}{ab}=\frac{x}{b}+\frac{y}{a}$, e da ciò si deduce che: *ogni frazione* $\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{ab}}$ *il cui denominatore è il prodotto di due numeri* a, b *primi fra loro, può decomporsi nella somma o differenza di due frazioni aventi rispettivamente per denominatori i numeri* a *e* b.

5. CASI FACILI PER LA RICERCA DI UNA SOLUZIONE.

1.° Se nell'equazione

$$ax+by=k$$

è $k=0$, una soluzione dell'equazione è data dalla coppia di numeri 0, 0.

2.° Se uno dei coefficienti a o b è $=1$, una soluzione dell'equazione si ottiene ponendo eguale a zero l'incognita dell'altro coefficiente. Così, per l'equazione

$$5x+y=4,$$

una soluzione è data dai numeri 0, 4.

3.° Più generalmente, se uno dei coefficienti è sottomultiplo di k, una soluzione dell'equazione si ottiene ponendo eguale a zero la incognita dell'altro coefficiente. Così, per l'equazione

$$7x+2y=6,$$

una soluzione è data dai numeri 0, 3.

4.° Se k è multiplo di $a+b$, o di $a-b$, posto $y=+x$, o $y=-x$ rispettivamente, si ha subito una soluzione del-

l'equazione. Così, per l'equazione

$$2x+3y=25\ ,$$

posto $y=x$, si ha $x=5$, e quindi una soluzione dell'equazione è data dai numeri $5,5$; per l'equazione

$$5x+6y=4\ ,$$

posto $y=-x$, si ha $x=-4$, e quindi una soluzione dell'equazione è data dai numeri $-4,4$.

6. Risoluzione generale. **I.° Metodo** (Euler). Per cercare una soluzione dell'equazione più generale, ridurremo la questione ad uno dei casi semplici.

Supposto che nell'equazione

$$ax+by=k$$

sia $a<b$, si risolva l'equazione rispetto ad x, e si ha

$$x=\frac{k-by}{a}\ ;$$

ed indicando con q e k' quoziente e resto della divisione di k per a, e con q' e b' quoziente e resto della divisione di b per a, si ha

$$x=q+\frac{k'}{a}-\left(q'+\frac{b'}{a}\right)y=q-q'y+\frac{k'-b'y}{a}\ .$$

Il secondo membro risulterà intero per ogni valore di y che renda intera la frazione $\frac{k'-b'y}{a}$. Perciò si ponga

$$\frac{h'-b'y}{a}=t$$

e si avrà

$$x=q-q'y+t\quad ,\quad b'y+at=k'\ ;$$

ed il problema è ridotto a trovare una soluzione dell'equazione

$$b'y+at=k'\ ,$$

che ha il coefficiente $b'<a$. Applicando a questa equazione lo stesso metodo si arriverà ad un'altra equazione, di cui i coefficienti sono b' ed il resto della divisione di a per b'; e così di seguito. E poiché le successive equazioni hanno

per coefficienti due dei numeri consecutivi che s'incontrano nella ricerca del M.C.D. fra b ed a (che sono per ipotesi primi fra loro) si perverrà ad un'equazione che ha un coefficiente eguale ad 1, e il problema sarà con ciò risoluto.

Si può osservare che se b' non è $< \frac{a}{2}$ si può fare la divisione di b per a per eccesso, ponendo $\frac{b}{a} = q' + 1 - \frac{b''}{a}$, e si avrebbe $b'' < \frac{a}{2}$, e l'equazione nuova sarebbe

$$-b''y + at = k',$$

più semplice dell'altra.

Si può anche osservare che se b e k, oppure b' e k', hanno un fattore comune, questo si può mettere in evidenza, e proseguire coi quozienti che risultano, ed anche in tal caso il calcolo si rende più semplice.

7. ESEMPII. 1.° Sia da risolvere l'equazione

$$3x - 8y = 43 .$$

Si avrà successivamente

$$x = \frac{43 + 8y}{3} = 14 + 3y + \frac{1 - y}{3} ;$$

e posto

$$\frac{1 - y}{3} = t ,$$

si ha

$$x = 14 + 3y + t ,$$
$$y + 3t = 1 .$$

Una soluzione della seconda equazione è data da

$$y = 1 \quad , \quad t = 0 ;$$

sostituendo questi valori nella precedente equazione si ha

$$x = 17 ,$$

e quindi una soluzione dell'equazione data è fornita dai numeri 17 e 1. Tutte le altre soluzioni sono quindi date dalle formole

$$x = 17 + 8t$$
$$y = 1 + 3t$$

e sono quelle fornite dalle seguenti progressioni:

$$x = \dots, -7, \quad 1, \quad 9, 17, 25, 33, 41, \dots$$
$$y = \dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots$$

2.º Sia da risolvere l'equazione

$$45x + 73y = 12;$$

risolvendola rispetto ad x si ha

$$x = \frac{12 - 73y}{45} = -2y + \frac{12 + 17y}{45} = -2y + t,$$

per avere posto $$\frac{12 + 17y}{45} = t.$$

Risolvendo quest'ultima rispetto ad y, si ha

$$y = \frac{-12 + 45t}{17} = -1 + 3t + \frac{5 - 6t}{17} = -1 + 3t + t',$$

per aver posto $$\frac{5 - 6t}{17} = t'.$$

Risolvendo questa equazione rispetto a t, si ha

$$t = \frac{5 - 17t'}{6} = 1 - 3t' - \frac{1 - t'}{6} = 1 - 3t' - t'',$$

per aver posto

$$\frac{1 - t'}{6} = t'',$$

da cui risulta

$$6t'' + t' = 1.$$

Una soluzione di questa equazione è data da

$$t' = 1 \quad , \quad t'' = 0,$$

quindi risulta

$$t = -2 \quad , \quad y = -6 \quad , \quad x = 10;$$

e perciò una soluzione dell'equazione data è

$$x = 10 \quad , \quad y = -6,$$

e tutte le soluzioni sono date da

$$x = 10 - 73u,$$
$$y = -6 + 45u.$$

8. 2° Metodo (Lagrange) *). Supposto che nell'equazione

$$ax + by = k$$

sia $a < b$, sviluppiamo la frazione b/a in frazione continua, e sia b'/a' la sua penultima ridotta. Per un teorema noto deve essere

$$ab' - ba' = +1 \,, \qquad \text{ovvero} \qquad ab' - ba' = -1 \,,$$

e moltiplicando per k o per $-k$,

$$a(b'k) + b(-a'k) = k \,, \qquad \text{ovvero} \qquad a(-b'k) + b(a'k) = k \,.$$

Nel caso a sinistra

$$x = b'k \quad , \quad y = -a'k$$

è una soluzione dell'equazione; nel caso a diritta

$$x = -b'k \quad , \quad y = a'k$$

è una soluzione dell'equazione.

Da questa soluzione, con le stesse formole esposte innanzi, si hanno tutte le altre soluzioni.

9. Esempio. Si voglia risolvere l'equazione

$$45x + 73y = 12 \,.$$

Svolgendo $\frac{73}{45}$ in frazione continua si ha

$$\frac{73}{45} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}}}$$

di cui le ridotte sono

$$\frac{1}{1} \,, \frac{2}{1} \,, \frac{3}{2} \,, \frac{5}{3} \,, \frac{8}{5} \,, \frac{13}{8} \,, \frac{73}{45} \,;$$

e quindi

$$45 \cdot 13 - 73 \cdot 8 = 1 \,,$$

e moltiplicando per 12

$$45(13 \cdot 12) + 73(-8 \cdot 12) = 12 \,,$$

donde una soluzione è data da

$$x = 156 \quad , \quad y = -96$$

*) Un altro metodo porta il nome di Hermite; riteniamo superfluo riportarlo.

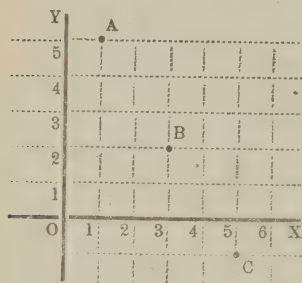
e perciò tutte le soluzioni sono date da

$$x = 156 - 73t$$
$$y = -96 + 45t$$

ovvero dalle coppie

$x = \quad \ldots \quad 156 , \quad 83 , \quad 10 , -63 , \ldots$

$y = \quad \ldots -96 , -51 , -6 , +39 , \ldots$

10. Significato geometrico. Ogni equazione di primo grado a due incognite, $ax + by = k$ a coefficienti interi, è soddisfatta, come abbiamo detto nei n.i **2** e **3**, da infinite soluzioni o da nessuna; se ora la coppia di numeri di ogni soluzione l'assumiamo come *ascissa* e *ordinata* di un punto di un piano riferito a due assi di coordinate OX, OY, avremo nel primo caso che tutte le soluzioni dell'equazione rappresentano infiniti punti del piano.

Si dimostra (cfr. *Aritm. gen. ed Algebra* del Liceo Moderno, VIII, § 2, 4) che tutti questi punti stanno su una linea retta, che taglia sugli assi OX, OY due segmenti a partire da O eguali rispettivamente a k/a, k/b.

Così, per es., dell'equazione $3x + 2y = 13$, essendo una soluzione data dai numeri (1, 5), le soluzioni sono date da

$$x = 1 - 2t$$
$$y = 5 + 3t$$

e la seguente, per $t = -1$, dai numeri (3, 2), ed essendo A e B i punti rappresentati da queste coordinate, tutti gli altri punti della retta AB, che equidistano fra loro di un segmento eguale ad AB, rappresentano tutte le altre soluzioni della detta equazione, perché si è dimostrato che una equazione $ax + by = k$ a coefficienti interi che ha una sola soluzione intera ne ha infinite in progressioni aritmetiche. Viceversa, ogni soluzione intera C di queste equazione deve rappresentare un punto del reticolato della precedente figura, per cui passa la retta AB.

Si noti intanto che anche un'equazione a coefficienti irrazionali rappresenta una retta e che una tale equazione, come per es. $3x + y\sqrt{2} = 6$, se può essere soddisfatta da una soluzione

intera, $(2, 0)$, non ne potrà avere altre in base alle formole del n. **3**; quindi si conchiude che:

Gettando a caso una retta sopra un reticolato di quadrati o di rettangoli eguali si possono avverare soltanto questi casi: o essa non passa per alcun nodo (punto) del reticolato, oppure essa passa per un'unico nodo del reticolato, o passa per infiniti nodi di esso, posti tutti ad egual distanza fra loro.

11. SOLUZIONI INTERE E POSITIVE. Tenendo conto esplicitamente dei segni dei coefficienti numerici dell'equazione indeterminata a due incognite, i casi che si possono presentare sono i seguenti:

$$ax + by = k \ ,$$
$$ax - \beta y = k \ ,$$
$$ax + by = -k \ ,$$
$$ax - by = -k \ .$$

La terza non può essere soddisfatta da valori positivi di x ed y; la quarta è del tipo della seconda; quindi occorre esaminare soltanto i primi due casi.

Nel secondo caso le soluzioni positive (lo zero compreso), nell'ipotesi che α e β sia una soluzione intera dell'equazione, sono date da

$$x = \alpha + bt \geqq 0 \quad , \quad y = \beta + at \geqq 0 \ ;$$

quindi deve essere

$$t \geqq -\frac{\alpha}{b} \quad , \quad t \geqq -\frac{\beta}{a} \ ;$$

e perciò tutti i valori interi di t, non minori della maggiore delle due frazioni $-\frac{\alpha}{b}$, $-\frac{\beta}{a}$, danno le soluzioni richieste.

In questo caso le soluzioni intere positive sono infinite.

Nel primo caso le formole delle soluzioni positive (lo zero compreso) sono date da

$$x = \alpha + bt \geqq 0 \quad , \quad y = \beta - at \geqq 0 \ ;$$

quindi deve essere

$$-\frac{\alpha}{b} \leqq t \leqq \frac{\beta}{a} \ ,$$

e le soluzioni positive richieste sono date dai valori interi di t dell'intervallo $\left(-\frac{\alpha}{b}, +\frac{\beta}{a}\right)$, compresi gli estremi. *In questo caso le soluzioni intere e positive sono in numero finito e possono anche mancare.*

12. Si può anche determinare *a priori* quante sono le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$ax + by = k .$$

Infatti, dall'identità

$$a\alpha + b\beta = k$$

si ha

$$\frac{\alpha}{b} + \frac{\beta}{a} = \frac{k}{ab} ,$$

e quindi

$$\frac{\beta}{a} = \frac{k}{ab} - \frac{\alpha}{b} .$$

Perciò i valori di t che rendono positive le soluzioni dell'equazione sono quelli che soddisfano alle condizioni

$$-\frac{\alpha}{b} \leqq t \leqq -\frac{\alpha}{b} + \frac{k}{ab} .$$

L'ampiezza dell'intervallo in cui t deve essere compreso è $\frac{k}{ab}$. Sia q è la parte intera del quoziente di k per ab, se l'estremo inferiore dell'intervallo è intero, esso è il primo valore intero dell'intervallo, altri q numeri interi sono dati dalle unità contenute in $\frac{k}{ab}$ e perciò gli interi sono in tutto $q+1$. Se l'estremo inferiore non è intero i primi numeri interi dell'intervallo sono quelli che risultano dalle unità della parte intera del numero $\frac{k}{ab}$ e quindi gli interi dell'intervallo sono soltanto q, fatta eccezione del caso che ora diremo. Se il resto della divisione di α per y è r, ed il resto della divisione di k per ab e r' qualora sia $\frac{r}{b} + \frac{r'}{ab} \geqq 1$, vi sarà ancora un'altra unità intera nell'intervallo; perciò in questo caso gli interi sono pure $q+1$. Quindi:

Il numero delle soluzioni intere, positive o nulle dell'equazione $ax + by = k$,

ove a, b, k *siano interi e positivi, è eguale alla parte intera del quoziente di* k *per* ab, *o a questa parte aumentata di uno.*

Si può anche dimostrare che:

L'equazione $ax + by = k$ *(per* a, b, k *interi e positivi) ha* q *soluzioni intere positive o nulle quando l'equazione* $ax+by=r'$ *non ha soluzioni positive, e ne ha* $q+1$ *quando sia* $r'=0$, *oppure quando* $ax + by = r'$ *abbia una soluzione positiva.*

Infatti, l'equazione $ax + by = r'$, per il teorema precedente, o ha una sola soluzione positiva o nessuna, perché $\frac{r'}{ab}$ è frazione propria. Supponiamo che essa abbia la soluzione positiva e sia α_1, β_1, sarà

$$a\alpha_1 + b\beta_1 = r' \qquad (1)$$

e scrivendo la data equazione

$$ax + by = qab + r'$$

e sottraendo da questa la precedente si ha

$$a(x - \alpha_1) + b(y - \beta_1) = qab ,$$

della quale, considerando come incognite $x - \alpha_1$ ed $y - \beta_1$, una soluzione è data da qb e 0; e quindi tutte le soluzioni della data equazione sono date da

$$x = \alpha_1 + qb - bt = \alpha_1 + b(q - t)$$
$$y = \beta_1 + at .$$

Dall'essere $r' < ab$, i valori α_1 e β_1 per la (1), debbono soddisfare le condizioni $\alpha_1 < b$, $\beta_1 < a$,

e perciò le incognite x, y risulteranno entrambe positive o nulle soltanto per

$$t = 0, 1, 2, \ldots, (q - 1), q .$$

e quindi la data equazione ha $q + 1$ soluzioni positive o o nulle.

Se l'equazione $ax + by = r'$ non ha soluzioni positive, supposto che sia x_1, y_1 una sua soluzione, e che quindi tutte le sue soluzioni siano

$$x = x_1 - bt$$
$$y = y_1 + at$$

possiamo trovare fra queste soluzioni una, x_2, y_2, che soddisfi alle condizioni

$$-b < x_2 < 0 \quad , \quad 0 < y_2$$

ed in tal caso le soluzioni positive o nulle per la data equazione sono date soltanto da

$$t = 0, 1, 2, 3, \ldots, (q-1) ,$$

e quindi essa ammette solo q soluzioni positive o nulle.

Se infine fosse $r' = 0$, la data equazione riducesi ad

$$ax + by = qab$$

ed ammetterebbe per soluzioni

$$x = qb - bt \; ,$$
$$y = 0 + at$$

e quindi le soluzioni positive o nulle sono date da

$$t = 0, 1, 2, \ldots, (q-1), q$$

e sono perciò anche $q + 1$.

ESEMPIO. Sia da risolvere l'equazione

$$3x + 23y = 440 \; ;$$

risolveremo per essa l'equazione

$$3x + 23y = 26 \; ,$$

della quale una soluzione è $x = 1, y = 1$, e quindi le soluzioni positive della data equazione sono

$$\begin{aligned} x &= 1 + 23(6-t) = 139, 116, 93, 70, 47, 24, \; 1 \\ y &= 1 + 3t \qquad\quad = \;\; 1, \;\; 4, \; 7, 10, 13, 16, 19 \, . \end{aligned}$$

Se è data invece a risolvere l'equazione

$$3y + 23y = 434 \; ,$$

l'equazione, che per essa occorre risolvere,

$$3x + 23y = 20$$

non ha soluzioni positive. Prendendo fra le sue soluzioni la soluzione $-1, 1$ si hanno per la data equazione le soluzioni positive

$$\begin{cases} x = -1 + 23(6-t) = 137, 114, 91, 68, 45, 22 \\ y = \quad 1 + 3t \qquad\quad = \;\; 1, \;\; 4, \; 7, 10, 13, 16 \, . \end{cases}$$

§ 2. — m equazioni fra $m+1$ incognite.

13. Risoluzione di un sistema di due equazioni di 1° grado a tre incognite. Siano date tra le incognite x, y, z due equazioni di 1° grado.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad , \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \ ; \quad (1)$$

eliminando tra esse una delle incognite, p. es. x, si avrà una sola equazione di 1° grado fra le incognite y, z, e sia

$$k_1y + l_1z = m_1 \ .$$

Allora al sistema dato si può sostituire il sistema

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad , \quad k_1y + l_1z = m_1 \ . \qquad (2)$$

Dalla seconda equazione delle (2) si ricavino y e z in funzione di una variabile ausiliaria t; e quindi si sostituiscano nella prima; si avrà una sola equazione tra x e t e sia

$$a_1x + kt = r \ .$$

Da questa si trarranno x e t in funzione di un'altra variabile ausiliaria u. e sostituendo nei valori precedentemente trovati di y, z a t il suo valore in funzione di u, si otterranno x, y, z in funzione della sola variabile u.

Quando le equazioni debbano essere risolute in numeri interi di segno qualunque, potranno attribuirsi alla variabile u tutti i valori interi.

Ma quando le soluzioni si restringono a quelle che sono insieme intere e positive, esisteranno dei limiti per u che si determineranno nel modo che mostreremo in seguito.

14. Esempio. Sia proposto di risolvere, in numeri interi, positivi o nulli, il sistema delle due equazioni

$$2x + 14y - 7z = 341 \ ,$$

$$10x + 4y + 9z = 473 \ .$$

Moltiplicando la 1ª equazione per 5, e sottraendo dal prodotto

la 2ª, x sarà eliminata, e si avrà

$$66y - 44z = 1232 ,$$

ovvero, dividendo i due membri per 22,

$$3y - 2z = 56 .$$

Osservando che 2 è divisore di 56, si trova che le soluzioni sono

$$y = 2t \quad , \quad z = 3t - 28 .$$

Sostituendo questi valori nella prima delle equazioni date si ottiene

$$2x + 7t = 145 ;$$

dalla quale ponendo $-x = +t$, si ha $t = 29$ e quindi

$$x = -29 + 7u \quad , \quad t = 29 - 2u ;$$

e sostituendo il valore di t in quelli di y e z, abbiamo le incognite x, y, z espresse in u, cioé:

$$x = -29 + 7u \quad , \quad y = 58 - 4u \quad , \quad z = 59 - 6u .$$

Queste formole fan conoscere tutti i valori interi che convengono alle proposte equazioni.

Ma poiché vuolsi inoltre che tali valori siano positivi o nulli, é necessario che si scelga u in modo che si abbia

$$-29 + 7u \geqq 0 \quad , \quad 58 - 4u \geqq 0 \quad , \quad 59 - 6u \geqq 0$$

e quindi

$$u \geqq 4 + \frac{1}{7} \quad , \quad u \leqq 14 + \frac{1}{2} \quad , \quad u \leqq 9 + \frac{5}{6} .$$

Cosicché i soli valori di u che possono dare valori interi e positivi delle incognite sono i numeri interi compresi fra $4 + \frac{1}{7}$ e $9 + \frac{5}{6}$, cioè i numeri 5, 6, 7, 8, 9, a cui corrispondono per le incognite i valori:

$$x = 6 , 13 , 20 , 27 , 34 ,$$
$$y = 38 , 34 , 30 , 26 , 22 ,$$
$$z = 29 , 23 , 17 , 11 , 5 .$$

15. L'esempio precedente mostra quale è il metodo da tenersi per risolvere in numeri interi, o interi e positivi, un qualunque altro sistema di m equazioni ad $m + 1$ incognite, cioè contenente una incognita in più delle equazioni.

Sian date p. es. tre equazioni di primo grado tra le incognite x, y, z, u; eliminando x si troveranno due equazioni tra y, z, u di primo grado; ed eliminando tra queste la y si avrà una sola equazione di primo grado tra z ed u. Con ciò al sistema dato si può sostituire un altro sistema formato di un'equazione fra x, y, z, u, di un'equazione fra y, z, u, e di una terza fra z ed u.

Da quest'ultima equazione si ricavano z ed u espresse in funzione di una variabile ausiliaria t. I loro valori sostituiti nell'equazione tra y, z, u, ne darà una tra y e t, da cui si trarranno i valori di y e t in funzione di un'altra variabile t', e col valore di t si potranno anche esprimere z ed u in funzione di t'.

Questi valori di y, z, u, sostituiti nell'equazione fra x, y, z, u, danno una equazione fra x e t', la quale farà trovare x e t' (e quindi anche y, z, u) in funzione di una nuova variabile t''.

Tutti i valori interi di t'' daranno tutte le soluzioni in numeri interi del dato sistema di equazioni in x, y, z, u: per avere poi le soluzioni intere e positive del sistema di equazioni date, bisognerà trovare i limiti dei valori che possono a tal uopo assegnarsi alla variabile t''.

È da notarsi che se dal sistema di equazioni date mediante eliminazioni, o mediante combinazioni lineari delle stesse equazioni, si giunge ad una equazione che non ammette soluzioni intere, il sistema proposto non ammette soluzioni intere.

Tale è p. es. il sistema

$$5x + 3y - 19z = 23$$
$$4x - 6y + 7z = 24 ,$$

poiché sommando le due equazioni si ha

$$9x - 3y - 12z = 47 ,$$

che non si può risolvere in numeri interi per il divisore 3 comune ai coefficienti delle incognite (cfr. in seguito n. **16**).

Se una delle equazioni del sistema è incompatibile con le

altre, il sistema non ammette soluzioni. Per es. il sistema

$$\begin{aligned} 14x + 15y + 29z - 12t &= 17 \\ 4x + 12y - 11z - 24t &= 37 \\ 2x + 3y + 2z - 4t &= 7 \end{aligned}$$

non ammette soluzioni, perché sommando le prime due equazioni e dividendo l'equazione risultante per 9 si ha

$$2x + 3y + 2z - 4t = 6 \ ,$$

che è incompatibile con la terza.

Se una delle equazioni del dato sistema è conseguenza di alcune o di tutte le altre, deve omettersi, perchè non stabilisce una nuova relazione fra le incognite. Per es. nel sistema

$$\begin{aligned} 14x + 15y + 29z - 12t &= 17 \\ 4x + 12y - 11z - 24t &= 37 \\ 2x + 3y + 2z - 4t &= 6 \end{aligned}$$

la terza equazione, per quanto si è detto precedentemente, è conseguenza delle due prime, e occorre di non tenerne conto, perciò il sistema è ridotto a due sole equazioni.

§ 3.—Una sola equazione con più di due equazioni.

16. Risoluzione in numeri interi di un'equazione di 1° grado con tre incognite. Si consideri dapprima l'equazione a 3 incognite

$$ax + by + cz = k \ ,$$

con a, b, c, k interi, e senza alcun fattore comune.

Affinché l'equazione abbia soluzioni intere è necessario e sufficiente che a, b, c *siano primi fra loro.*

La condizione suddetta è necessaria, perché se a, b, c avessero un divisore comune d, dividendo tutta l'equazione per d, e indicando con a', b', c' i quozienti ottenuti da a, b, c

si avrebbe $$a'x + b'y + c'z = \frac{k}{d} \ ,$$

e ciò è assurdo per valori interi di x, y, z.

Per mostrare che la condizione è anche *sufficiente* sia D il M.C.D. fra a e b; dividendo per esso l'equazione, e indicando con a'', b'' i nuovi quozienti di a e b, si ha

$$a''x + b''y = \frac{k - cz}{\mathrm{D}} . \qquad (1)$$

Posto il secondo membro eguale a t, si ha

$$cz + \mathrm{D}t = k ,$$

e siccome D e c sono, per conseguenza dell'ipotesi, primi fra loro, devono esistere infinite soluzioni di questa equazione. Ognuna di esse rende intero il secondo membro della (1) e quindi per ognuna di esse, esistono infinite coppie di valori di x ed y che risolvono l'equazione data.

17. La dimostrazione stessa ci conduce ad un metodo per trovare tutte le infinite soluzioni dell'equazione

$$ax + by + cz = k .$$

La (1) e la seguente si possono scrivere

$$a''x + b''y = t ,$$
$$\mathrm{D}t + cz = k .$$

Indichiamo con x_0, y_0 una soluzione dell' equazione $a''x + b''y = 1$; sarà $x_0 t, y_0 t$ una soluzione dell'equazione $a''x + b''y = t$; quindi tutte le soluzioni di detta equazione sono

$$x = x_0 t + b''u ,$$
$$y = y_0 t - a''u .$$

Se s'indica con t_0, z_0 una soluzione di $\mathrm{D}t + cz = k$, tutte le sue soluzioni sono date da

$$t = t_0 + cv ,$$
$$z = z_0 - \mathrm{D}v ,$$

e quindi le soluzioni della data equazione sono

$$x = x_0 t_0 + cx_0 v + b''u ,$$
$$y = y_0 t_0 + cy_0 v - a''u ,$$
$$z = z_0 - \mathrm{D}v .$$

Queste soluzioni dipendono dalle combinazioni a due a due degli infiniti valori interi che si possono dare alle due variabili u e v, e perciò si dice che sono in numero *doppiamente infinito*, o costituiscono una *doppia infinità*.

Nel caso che due dei coefficienti siano primi fra loro, per es. a e b, l'equazione $ax + by = k - cz$, permette di esprimere x ed y direttamente in funzione della variabile z e di un'altra variabile u, e con ciò la risoluzione è abbreviata.

18. Un altro metodo, anche semplice, per risolvere l'equazione data è il seguente.

Si risolva l'equazione data rispetto all'incognita che ha il coefficiente più piccolo, e sia questa la x; si ha

$$x = \frac{k - by - cz}{a} .$$

Si estraggano le parti intere dalle frazioni $\frac{k}{a}, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}$ e si abbia

$$x = q - q'y - q''z + \frac{r - r'y - r''z}{a} .$$

Si ponga

$$\frac{r - r'y - r''z}{a} = t ,$$

e si avrà

$$at + r'y + r''z = r .$$

Su questa si operi come sulla prima, scegliendo quella incognita che ha il coefficiente minore; così continuando si finirà coll'ottenere una delle incognite col coefficiente uno. Questa è in tal caso esprimibile in forma intera mediante due variabili, e da essa risalendo alle precedenti si ritroveranno x, y, z esprimibili in forma intera in funzione di due variabili intere.

19. ESEMPIO 1.° Useremo entrambi i metodi sopra esposti per risolvere l'equazione

$$8x + 12y + 9z = 130 .$$

1.° metodo. Dall'equazione

$$8x + 12y + 9z = 130$$

si deduce

$$2x + 3y = \frac{130 - 9z}{4} = t ,$$

$$4t + 9z = 130 .$$

Risolvendo $2x + 3y = 1$ si ha che una soluzione è -1 ed 1; quindi tutte le soluzioni di $2x + 3y = t$ sono

$$x = -t + 3u ,$$
$$y = \quad t - 2u .$$

Risolvendo l'equazione $4t + 9z = 130$ si trova che una soluzione è 10,10, quindi tutte le sue soluzioni sono

$$t = 10 + 9v ,$$
$$z = 10 - 4v ;$$

e perciò le soluzioni della data equazione sono date da

$$x = -10 - 9v + 3u ,$$
$$y = \quad 10 + 9v - 2u ,$$
$$z = \quad 10 - 4v .$$

Nella data equazione i coefficienti 8 e 9 sono primi fra loro, perciò si poteva risolvere più utilmente l'equazione ponendo

$$8x + 9z = 130 - 12y .$$

Difatti, una soluzione di $8x + 9z = 1$ è $-1, 1$, tutte le soluzioni della data equazione sono quindi immediatamente ottenute dalle formule

$$x = -130 + 12y + 9u ,$$
$$y = \quad 130 - 12y - 8u ,$$
$$z = \quad y .$$

2.° metodo. Dall'equazione

$$8x + 12y + 9z = 130$$

si deduce

$$x = \frac{130 - 12y - 9z}{8} = 16 - y - z + \frac{2 - 4y - z}{8} = 16 - y - z + t,$$

avendo posto

$$\frac{2 - 4y - z}{8} = t ;$$

e quindi successivamedte si ha

$$8t + 4y + z = 2 \ ,$$
$$z = 2 - 8t - 4y \ ,$$
$$x = 16 - y - 2 + 8t + 4y + t = 14 + 3y + 9t \ .$$

Dunque le soluzioni sono date da

$$x = 14 + 3y + 9t \ ,$$
$$z = 2 - 4y - 8t \ ,$$
$$y = y \ .$$

Per avere le soluzioni soltanto positive useremo le ultime formole che si presentano più semplici. Deve essere

$$14 + 3y + 9t > 0 \ ,$$
$$3 - 4y - 8t > 0 \ ,$$
$$y > 0 \ .$$

Eliminando fra 1ª e 2ª diseguaglianza la y si ha

$$62 + 12t > 0 \ , \quad \text{donde} \quad t > -\frac{31}{6} \ , \quad \text{ovvero} \quad t \geqq -5 \ .$$

Eliminaudo fra 2ª e 3ª diseguaglianza la y si ha

$$2 - 8t > 0 \ , \quad \text{donde} \quad t < \frac{1}{4} \ , \quad \text{ovvero} \quad t \leqq 0 \ .$$

Dunque t può avere i valori

$$0 \, , -1 \, , -2 \, , -3 \, , -4 \, , -5 \ .$$

Per $t = 0$ deve essere $14 + 3y > 0 \, , 2 - 4y > 0 \, , y > 0$, e ciò è assurdo.

Per

$t = -1$	$t = -2$	$t = -3$	$t = -4$	$t = -5$
si ha				
$y = 1 \, , \ 2$	$y = 2 \, , 3 \, , 4$	$y = 5 \, , 6$	$y = 8$	nessuna soluzione;
$x = 8 \, , 11$	$x = 2 \, , 5 \, , 8$	$x = 2 \, , 5$	$x = 2$	
$z = 6 \, , \ 2$	$z = 10 \, , 6 \, , 2$	$z = 6 \, , 2$	$z = 2$	

in tutto 8 soluzioni.

Non diversamente si sarebbero attenute le soluzioni numeriche dalle altre formole trovate col metodo precedente. Però non è ancora completamente noto come si possa passare dalle *formole* di una soluzione a quelle di un'altra soluzione.

Esempio 2°. Sia da risolvere

$$41x + 17y - 22z = 318 .$$

Si ha

$$y = \frac{318-41x+22z}{17} = 19-2x+z+\frac{-5-7x+5z}{17} = 19-2x+z+t ,$$

avendo posto $\quad \dfrac{-5-7x+5z}{17} = t ,$

da cui si ha successivamente

$$5z - 7x - 17t = 5 ,$$

$$z = \frac{5+7x+17t}{5} = 1+x+3t+\frac{2x+2t}{5} = 1+x+3t+2t' ,$$

per aver posto $\dfrac{x+t}{5} = t'$, e quindi risulta

$$x = -t + 5t' ,$$
$$z = 1+x+3t+2t' = 1+2t+7t' ,$$
$$y = 19+2t-10t'+1+2t+7t'+t = 20+5t-3t' .$$

Cosicchè le soluzioni soltanto positive son date dalle formole

$$x = -t + 5t' > 0$$
$$y = 20 + 5t - 3t' > 0$$
$$z = 1 + 2t + 7t' > 0 .$$

Eliminando t tra 1^a e 3^a si ha

$$1 + 17t' > 0 , \quad \text{donde} \quad t' > -\frac{1}{17} , \quad \text{ovvero} \quad t' \geqq 0 .$$

Eliminando t tra 1^a e 2^a si ha

$$20 + 22t' > 0 , \quad \text{donde} \quad t' > -\frac{10}{11} , \quad \text{ovvero} \quad t' \geqq 0 .$$

Posto $t' = 0$ si hanno condizioni assurde.

Posto $t' = 1$ si ha $-t + 5 > 0$, $17 + 5t > 0$, $8 + 2t > 0$, donde $-3 \leqq t < 5$ e quindi t può prendere i valori

$$-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4.$$

Posto $t' = 2$ si hanno per t i valori

$$-2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9.$$

Ecc. ecc., con soluzioni sempre più numerose al crescere di t'.

ESEMPIO 3°. *Si cerchino le soluzioni intere, positive o nulle dell' equazione*

$$5x + 7y + 8z = 50 .$$

Risolvendo rispetto ad x, si ha

$$x = \frac{50 - 7y - 8z}{5} = 10 - y - 2z - \frac{2y - 2z}{5} = 10 - y - 2z - 2t ,$$

avendo posto

$$\frac{y - z}{5} = t ,$$

da cui

$$y = z + 5t ,$$
$$x = 10 - z - 5t - 2z - 2t = 10 - 3z - 7t .$$

Cosicché tutte le soluzioni sono date da

$$x = 10 - 3z + 7t ,$$
$$y = z + 5t ,$$
$$z = z .$$

Per le soluzioni positive o nulle deve aversi

$$10 - 3z - 7t \geqq 0 \quad , \quad z + 5t \geqq 0 \quad , \quad z \geqq 0 .$$

Da 1ª e 2ª si ha	Da 1ª e 3ª si ha	Dalla 2ª si ha
$50 - 8z \geqq 0$	$10 - 7t \geqq 0$	$t \geqq -\frac{z}{5}$.
$z \leqq \frac{25}{4}$.	$t \leqq \frac{10}{7}$.	

Dunque deve essere $z = 0,1,2,3,4,5,6$, e per questi valori di z può soltanto essere $t = -1 , 0 , +1$.

Per

$t = 0$	$t = 1$	$t = -1$

si ha

$t = 0$	$t = 1$	$t = -1$
$z = 1 , 2 , 3 , 0$	$z = 1 , 0$	$z = 5$
$y = 1 , 2 , 3 , 0$	$y = 6 , 5$	$y = 0$
$x = 7 , 4 . 1 , 10$	$x = 0 , 3$	$x = 2$.

Dunque l'equazione ammette 7 soluzioni, che si riducono a 3 se si tralasciano i valori nulli.

ESEMPIO 4°. *Si cerchino dell'equazione* $98x - 10y - 199z = 16$ *le soluzioni intere positive o nulle non minori di* 10.

Risolvendo rispetto a y si ha

$$y = \frac{98x - 199z - 16}{10} = 10x - 20z - 2 + \frac{-2x + z + 4}{10} = 10x - 20z - 2 + t,$$

avendo posto

$$\frac{-2x + z + 4}{10} = t\,,$$

da cui

$$\begin{aligned} z &= 2x + 10t - 4\,,\\ y &= 10x - 200t - 40x + 80 - 2 + t = -30x - 199t + 78\,,\\ x &= x\,. \end{aligned}$$

Quindi occorre che sia

$$\begin{aligned} 10 &> x \geqq 0\,,\\ 10 &> 78 - 30x - 199t \geqq 0\,,\\ 10 &> -4 + 2x + 10t \geqq 0\,. \end{aligned}$$

Eliminando x fra 2^a e 3^a e fra la 1^a e la 2^a si ha che deve essere

$$-1 \leqq t \leqq 0\,;$$

dunque occorre esaminare solo i valori di $t = 0$, $t = -1$.

Per $t = 0$, la seconda disequazione non è soddisfatta da alcun valore di x.

Per $t = -1$, la seconda disequazione diventa

$$10 > 277 - 30x \geqq 0\,,$$

e quindi x può essere soltanto $= 9$, e in tal caso

$$y = 7 \quad , \quad z = 4\,.$$

Dunque l'unica soluzione è data dai numeri 9, 7, 4.

ESEMPIO 5°. *Si cerchino le soluzioni intere, positive o nulle dell'equazione*

$$15x + 6y + 20z = 171\,.$$

Risolvendo rispetto ad y si ha

$$y = \frac{171 - 15x - 20z}{6} = 28 - 2x - 3z + \frac{3 - 3x - 2z}{9} = 28 - 2x - 3z + t\,,$$

qualora sia posto

$$3 - 3x - 2z = 6t .$$

Indi si ha successivamente

$$z = \frac{3 - 3x - 6t}{2} = 1 - x - 3t + \frac{1 - x}{2} = 1 - x - 3t + t' ,$$

per aver posto $1 - x = 2t'$;

da cui $x = 1 - 2t'$,

e quindi $z = 3t' - 3t$,

$$y = 28 - 2 + 4t' - 9t' + 9t + t = 26 + 10t - 5t' .$$

Dunque si hanno le soluzioni delle formole

$$x = 1 - 2t \geqq 0 ,$$
$$y = 26 - 5t' + 10t \geqq 0 ,$$
$$z = 3t' - 3t \geqq 0 .$$

Eliminando t' fra 1ª e 3ª si ha

$$1 - 2t \geqq 0 \quad , \quad t \leqq \frac{1}{2} ,$$

ed eliminando t' fra 2ª e 3ª si ha

$$26 + 5t \geqq 0 \quad , \quad t \geqq - \frac{26}{5} .$$

Perciò t può assumere i soli valori

$$-5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 .$$

Eliminando t fra 2ª e 3ª si ha

$$26 + 5t' \geqq 0 \quad , \quad t' \geqq - \frac{26}{5} ;$$

ma dalla 1ª si ha $t' \leqq \frac{1}{2}$; perciò t' può al pari di t assumere i valori

$$-5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 .$$

Ponendo $t = -5$ nelle cendizioni soprascritte si trova che t'

deve essere $\leqq \frac{1}{2}, \leqq -\frac{24}{5}, \geqq -5$, e quindi può assumere solo il valore -5.

Ponendo $t = -4$, risulta che t' deve essere $\leqq -\frac{14}{5}, \geqq -4$, e quindi può assumere i soli valori $-4, -3$.

Ponendo $t = -3$, risulta

$$t' \leqq -\frac{4}{5} \quad , \quad \geqq -3 \; , \quad \text{quindi} \quad t' = -3, -2, -1 \; .$$

Ponendo $t = -2$, risulta

$$t' \leqq \frac{1}{2} \quad , \quad \leqq \frac{6}{5} \quad , \quad \geqq -2 \; , \quad \text{quindi} \quad t' = -2, -1, 0 \; .$$

Ponendo $t = -1$, risulta

$$t' \leqq \frac{1}{2} \quad , \quad \leqq \frac{16}{5} \quad , \quad \geqq -1 \; , \quad \text{quindi} \quad t' = -1, 0 \; .$$

Ponendo $t = 0$, risulta

$$t' \leqq \frac{1}{2} \quad , \quad \leqq \frac{26}{5} \quad , \quad \geqq 0 \; , \quad \text{quindi} \quad t' = 0 \; .$$

Riassumendo si ha il seguente quadro:

t	t'	x	y	z
— 5	— 5	11	1	0
— 4	— 4	9	6	0
»	— 3	7	1	3
— 3	— 3	7	11	0
»	— 2	5	6	3
»	— 1	3	1	6
— 2	— 2	5	16	0
»	— 1	3	11	3
»	0	1	6	6
— 1	— 1	3	21	0
»	0	1	16	3
0	0	1	26	0

20. RISOLUZIONE DEL CASO GENERALE. L'equazione di 1° grado fra n incognite può essere rappresentata da

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x_1 = a_0 \ .$$

Supposto che sia d_{n-2} il M.C.D. fra a_n e a_{n-1} e che sia

$$a_n = a'_n d_{n-2} \quad , \quad a_{n-1} = a'_{n-1} d_{n-2} \ ,$$

si avrà da essa

$$a'_n x_n + a'_{n-1} x_{n-1} = \frac{a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_{n-2} x_{n-2}}{d_{n-2}} \ ,$$

e posto il secondo membro eguale ad y_{n-2}, si avranno le due equazioni

$$a'_n x_n \quad + a'_{n-1} x_{n-1} = y_{n-2} \ ,$$
$$d_{n-2} y_{n-3} + a_{n-2} x_{n-2} = a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_{n-3} x_{n-5} \ .$$

Sia d_{n-3} il M.C.D. fra d_{n-2} ed a_{n-2}, e sia

$$d_{n-2} = d'_{n-2} d_{n-3} \quad , \quad a_{n-2} = a'_{n-2} d_{n-3} \ ,$$

con modo analogo al precedente si arriverà alle due equazioni

$$d'_{n-2} y_{n-2} + a'_{n-2} x_{n-2} = y_{n-3} \ ,$$
$$d_{n-3} y_{n-3} + a_{n-3} x_{n-3} = a_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_{n-4} x_{n-4} \ .$$

Proseguendo analogamente con notazioni analoghe si perviene all'equazione

$$d_1 y_1 + a_1 x_1 = a_0 \ .$$

I valori delle incognite della data equazione si otterranno risolvendo le equazioni

$$\left.\begin{array}{llll} a'_n x_n & + a'_{n-1} x_{n-1} & = y_{n-2} \\ d'_{n-2} y_{n-2} & + a'_{n-2} x_{n-2} & = y_{n-3} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ d'_2 y_2 & + a'_2 x_2 & = y_1 \\ d_1 y_1 & + a_1 x_1 & = a_0 \end{array}\right\}$$

ove

$$\left.\begin{array}{l} a'_n = \dfrac{a_n}{d_{n-2}} \ , \ a'_{n-2} = \dfrac{a_{n-2}}{d_{n-3}} \ , \ a'_{n-3} = \dfrac{a_{n-3}}{d_{n-4}} \ , \ \ldots \ , \ a'_2 = \dfrac{a_2}{d_1} \ , \\ a'_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}}{d_{n-2}} \ , \ d'_{n-2} = \dfrac{d_{n-2}}{d_{n-3}} \ , \ d'_{n-3} = \dfrac{d_{n-3}}{d_{n-4}} \ , \ \ldots \ , \ d'_2 = \dfrac{d_2}{d_1} \ . \end{array}\right\}$$

Siano β_1, α_1 una soluzione dell'ultima equazione ed $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}$, $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{n-1}$ i valori di $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, y_2, y_3, \ldots, y_{n-2}, x_n$ che soddisfano all'equazioni ottenute dalle altre mutando i secondi membri in unità; le soluzioni delle dette equazioni (incominciando dall' ultima) saranno date da

$$\begin{array}{llll}
y_1 = \beta_1 & - a_1 t_1 & x_1 = \alpha_1 & + d_1 t_1 \\
y_2 = y_1\beta_2 & - a'_2 t_2 & x_2 = y_1\alpha_2 & + d'_2 t_2 \\
y_3 = y_2\beta_3 & - a'_3 t_3 & x_3 = y_2\alpha_3 & + d'_3 t_3 \\
\cdots & & \cdots & \\
y_{n-2} = y_{n-3}\beta_{n-2} & - a'_{n-2} t_{n-2} & x_{n-2} = y_{n-3}\alpha_{n-2} & + d'_{n-2} t_{n-2} \\
x_n = y_{n-2}\beta_{n-1} & - a'_{n-1} t_{n-1} & x_{n-1} = y_{n-2}\alpha_{n-1} & + a'_n t_{n-1}
\end{array}$$

dalle quali con successive sostituzioni dei valori delle y si ha

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = \alpha_1 + d_1 t_1 \\
x_2 = \beta_1\alpha_2 - a_1\alpha_2 t_1 + d'_2 t_2 \\
x_3 = \beta_1\beta_2\alpha_3 - a_1\beta_2\alpha_3 t_1 - a'_2\alpha_3 t_2 + d'_3 t_3 \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} = \beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-2}\alpha_{n-1} - a_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_{n-2}\alpha_{n-1} t_1 - a'_2\beta_3\beta_4\ldots\beta_{n-2}\alpha_{n-1} t_2 - \ldots \\
\qquad\qquad - a'_{n-2}\alpha_{n-1} t_{n-2} + a_n t_{n-1} \\
x_n = \beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-2}\beta_{n-1} - a_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_{n-2}\beta_{n-1} t_1 - a'_2\beta_3\beta_4\ldots\beta_{n-2}\beta_{n-1} t_3 - \ldots \\
\qquad\qquad - a'_{n-2}\beta_{n-1} t_{n-2} - a'_{n-1} t_{n-1}\,.
\end{array}\right\} \quad (1)$$

E questi sono i valori che danno le soluzioni dell' equazione data.

Si può notare che x_1 dipende dal solo parametro t_1, x_2 dipende da due parametri t_1, t_2, ecc. e soltanto x_{n-1} ed x_n dipendono da $n-1$ parametri.

Siccome le t si potrebbero mettere tutte aguáli a zero, risulta che i primi termini costituiscono una particolare soluzione dell' equazione.

Chiamiamo questi termini rispettivamente $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, essi annullano l' equazione data e quindi annullano l' equazione

$$a_n(x_n - \gamma_n) + a_{n-1}(x_{n-1} - \gamma_{n-1}) + \cdots + a_1(x_1 - \gamma_1) = 0$$

e posto

$$x_n - \gamma_n = z_n \ , \ \ldots \ , \ x_1 - \gamma_1 = z_1 \ ,$$

si ha l' equazione

$$a_n z_n + a_{n-1} z_{n-1} + \cdots + a_1 z_1 = 0$$

che è la stessa equazione data, priva del suo termine noto. Dunque la data equazione priva del termine noto ha per soluzioni quelle dedotte dalle formole $z_1, z_2, \ldots, z_n$ che si ricavano dalle $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Volendo dalle formole (1) le soluzioni intere e positive occorre risolvere le disaquazioni

$$\begin{aligned} &\alpha_1 + a_1 t_1 > 0 \\ &\beta_1 \alpha_2 - a_1 \alpha_2 t_1 + d'_2 t_2 > 0 \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \end{aligned}$$

e si potrebbe dalla prima ricavare $t_1 > -\frac{\alpha_1}{a_1}$, e con i valori di questa dalla seconda si avrebbero i valori di $t_2 > \frac{a_1 \alpha_2 t - \beta_1 \alpha_2}{d'_2}$, ecc. e soltanto dalle due ultime si avrebbero due condizioni per t_{n-1} che potrebbero limitare il numero delle soluzioni. Quindi è più utile cominciare dalla eliminazione di t_{n-1}, mediante le due ultime, e poi eliminare t_{n-2} tra la disequazione che risulta e la terz'ultima e così via, come abbiamo visto nei diversi esempi.

21. Il metodo qui innanzi indicato è suscettibile di dare formole semplicissime in alcuni casi particolari che è bene tener presenti nella pratica.

Supponiamo dapprima che due coefficienti dell' equazione data siano primi tra loro, e siano quelli di x_n, x_{n-1}, si potrà in tal caso porre

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} = a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 - \cdots - a_{n-2} x_{n-2} \ ,$$

e se α, β costituiscono una soluzione dell' equazione

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} = 1 \ ,$$

tutte le soluzioni della precedente saranno date da

$$\begin{aligned} x_n &= \alpha(a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_{n-2} x_{n-2}) - a_{n-1} t_1 \ , \\ x_{n-1} &= \beta(a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_{n-2} x_{n-2}) + a_n t_1 \ ; \end{aligned}$$

e quindi le soluzioni della data equazione sono date dai valori interi arbitrarii dati ad $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-2}$ e dai valori interi di x_n ed x_{n-1} che risultano dalle formole precedenti.

Questo caso lo abbiamo già presentato col 1⁰ esempio del n. **19** mediante l'equazione

$$8x + 12y + 9z = 130 \ .$$

Se si dovesse risolvere l'equazione

$$9x_5 + 23x_4 - 8x_3 - 15x_2 + 7x_1 = 124 \ ,$$

essendo 9 e 23 primi fra loro (come anche due qualunque altri dei coefficienti), supponendo arbitrarii x_1, x_2, x_3 basterà risolvere l'equazione

$$9x_5 + 23x_4 = 124 - 7x_1 + 15x_2 + 8x_3 \ ,$$

e siccome una soluzione di

$$9x_5 + 23x_4 = 1$$

è data da $x_4 = 2, x_5 = -5$, si hanno tutte le soluzioni volute dalle formole

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= \quad 248 - 14x_1 + 30x_2 + 16x_3 - 9t \\ x_5 &= -620 + 35x_1 - 75x_2 - 40x_3 + 23t \ . \end{aligned}$$

Analogo risultato si avrebbe se $n - 1$ coefficienti avessero per M.C.D. un numero primo coll'n^{mo} coefficiente.

Ciò avviene nell'esempio

$$6x_5 + 15x_4 + 21x_3 + 36x_2 + 5x_1 = 1 \ .$$

Posto

$$2x_5 + 5x_4 + 7x_3 + 12x_2 = y \ , \quad \text{si ha} \quad 3y + 5x_1 = 1 \ .$$

Le soluzioni della seconda equazione sono date da

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + 3t_1 \ , \\ y &= \quad 2 - 5t_1 \ ; \end{aligned}$$

sostituendo questo valore di y nella prima si ha l'equazione

$$2x_5 + 5x_4 + 7x_3 + 12x_2 + 5t_1 = 2 \ ,$$

dalla quale, essendo 2 e 5 primi fra loro, si deduce

$$2x_5 + 5x_4 = 2 - 5t_1 - 12x_2 - 7x_3 ,$$

e poiché una soluzione di $2x_5 + 5x_4 = 1$ è data da $-2, 1$, le formole che risolvono l'equazione data sono:

$$\begin{aligned} x_5 &= -2(2 - 5t_1 - 12x_2 - 7x_3) + 5t_2 \\ x_4 &= \quad 2 - 5t_1 - 12x_2 - 7x_3 - 2t_2 \\ x_3 &= x_3 \\ x_2 &= x_2 \\ x_1 &= -1 + 3t_1 . \end{aligned}$$

22. Nel caso che l'equazione data non abbia alcuna coppia di coefficienti primi fra loro, e che il massimo comune divisore d fra a_n ed a_{n-1}, sia primo con ciascuno degli altri coefficienti; supposto $a_n = a'_n d$, $a_{n-1} = a'_{n-1} d$, poniamo

$$a'_n x_n + a'_{n-1} x_{n-1} = y \tag{2}$$

e risulta

$$dy + a_{n-2} x_{n-2} = a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \cdots - a_{n-3} x_{n-3} . \tag{3}$$

Essendo d ed a_{n-2} primi fra loro, se α, β danno una soluzione dell'equazione

$$dy + a_{n-2} x_{n-2} = 1 ,$$

saranno

$$\begin{aligned} y &= \alpha(a_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_{n-3} x_{n-3}) - a_{n-2} t_1 \\ x_{n-2} &= \beta(a_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_{n-3} x_{n-3}) + d t_1 \end{aligned}$$

tutte le soluzioni della equazione (3).

Sostituendo i valori di y nella (2) si ha

$$a'_n x_n + a'_{n-1} x_{n-1} + a_{n-2} t_1 + \alpha a_{n-3} x_{n-3} + \cdots + \alpha a_1 x_1 = \alpha a_0 ,$$

la quale ha i coefficienti a'_n, a'_{n-1} primi fra loro e quindi si ricade per essa nel caso considerato prima, e cioè le $t_1, x_{n-3}, \ldots, x_1$ sono arbitrarie, x_{n-2} è funzione di tutte queste $n-2$ variabili, ed x_n, x_{n-1} sono funzioni di esse e di un'altra variabile t_2.

ESEMPIO. Un esempio si può avere nell'equazione

$$6x_5 + 15x_4 + 10x_3 + 20x_2 + 30x_1 = 3 .$$

Fra 6 e 15 il M.C.D. è 3; quindi ponendo

$$2x_5 + 5x_4 = y , \quad \text{si ha} \quad 3y + 10x_3 = 3 - 30x_1 - 20x_2 .$$

Essendo 3, 10 primi fra loro, e $-3, 1$ una soluzione dell'equazione $3y + 10x_3 = 1$, si ha che le soluzioni della seconda sono

date da
$$y = -3(3 - 90x_1 - 20x_2) - 10t_1 \,,$$
$$x_3 = 3 - 30x_1 - 20x_2 + 3t_1 \,.$$

Invece essendo $-2, 1$ una soluzione dell'equaziono $2x_5 + 5x_4 = 1$, le soluzioni della prima sono date da

$$x_5 = +6(3 - 30x_1 - 20x_2) + 20t_1 + 5t_1 \,,$$
$$x_4 = -3(3 - 30x_1 - 20x_2) - 10t_1 - 2t_2 \,.$$

Dunque la data equaziene è risoluta dalle formole

$$\begin{aligned} x_5 &= 18 - 180x_1 - 120x_2 + 20t_1 + 5t_2 \,, \\ x_4 &= -9 + 90x_1 + 60x_2 - 10t_1 - 2t_2 \,, \\ x_3 &= 3 - 30x_1 - 20x_2 + 3t_1 \,, \\ x_2 &= x_2 \,, \\ x_1 &= x_1 \,. \end{aligned}$$

23. Se invece l'equazione data non ha alcuna coppia di coefficienti primi fra loro, ed il divisore comune di due di essi divide anche altri coefficienti, qualora il massimo comune divisore d dei coefficienti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}$ (per $k < n$) sia primo con i rimanenti coefficienti; supposto

$$a_n = a'_n d \,, \quad a_{n-1} = a'_{n-1} d \,, \quad \ldots \,, \quad a_{n-k} = a'_{n-k} d \,,$$

poniamo

$$a'_n x_n + a'_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a'_{n-k} x_{n-k} = y \tag{4}$$

e l'equazione diviene

$$dy + a_{n-k-1} x_{n-k-1} + \ldots + a_2 x_2 + a_1 x_1 = a_0 \,.$$

Per ipotesi d è primo con a_{n-k-1}, quindi si può scrivere

$$dy + a_{n-k-1} x_{n-k-1} = a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \ldots - a_{n-k-2} x_{n-k-2}$$

e se α, β danno una soluzione di $dy + a_{n-k-1} x_{n-k-1} = 1$, saranno

$$y = \alpha(a_0 - a_1 x_1 - \ldots - a_{n-k-2} x_{n-k-2}) - a_{n-k-1} t_1$$
$$x_{n-k-1} = \beta(a_0 - a_1 x_1 - \ldots - a_{n-k-2} x_{n-k-2}) + dt_1$$

le soluzioni di essa, e quindi sostituendo il valore di y nella (4) si ha

$$a'_n x_n + a'_{n-1} x_{n-1} + \ldots + a_{n-k-1} t_1 + \alpha a_{n-k-2} x_{n-k-2} + \ldots + \alpha a_1 x_1 = \alpha_0 a$$

e su questa si continua come nei casi precedenti.

§ 4. — m equazioni con $m+h$ incognite.

24. SISTEMI DI m EQUAZIONI DI 1° GRADO CON $m+h$ INCOGNITE. Per risolvere un sistema di m equazioni ad $m+h$ incognite $x_1, x_2, \ldots, x_{m+h}$, per via di eliminazioni si sostituisce a questo sistema un altro sistema di equazioni di cui una contenga $m+h$ incognite, un'altra $m+h-1$, un'altra $m+h-2$, e l'ultima $h+1$ incognite soltanto, p. es. $x_1, x_2, \ldots, x_{h+1}$. Quindi col metodo detto innanzi si risolve l'equazione indeterminata ad $h+1$ incognite. Queste saranno espresse in funzioni di h variabili arbitrarie $t_1, t_2, \ldots, t_h$. Sostituendole nell'altra ad $h+2$ incognite si avrà un'equazione indeterminata che avrà per incognite le h variabili t e la incognita x_{h+2}, cioè pur essa con $h+1$ incognite e quindi si risolverà in funzione di h variabili arbitrarie $l_1, l_2, \ldots, l_h$. Mediante le $t_1 \ldots t_h$ anche le $x_1, \ldots, x_h$ si esprimeranno in funzione delle $l_1 \ldots l_h$ *). Così seguitando a sostituire i valori trovati nelle altre equazioni, e supponendo che ogni volta l'equazione risultante ammetta soluzioni intere, si perviene ad ottenere tutte le incognite espresse in funzione di h parametri $m_1 \ldots m_h$, gli ultimi che sono stati introdotti.

25. ESEMPIO 1.° Sia da risolvere il sistema

$$\begin{aligned} 3x_5 - 2x_4 + 41x_3 - 7x_2 + 3x_1 &= 8 , \\ x_5 - 3x_4 + 6x_3 + 5x_2 - 2x_1 &= -7 , \\ 2x_5 - x_4 - 3x_3 + 2x_2 - x_1 &= -3 . \end{aligned}$$

Eseguendo l'eliminazione opportuna si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} x_5 - 3x_4 + 6x_3 + 5x_2 - 2x_1 &= -7 , \\ 5x_4 - 15x_3 - 8x_2 + 3x_1 &= 11 , \\ 110x_3 - 27x_2 + 12x_1 &= 34 . \end{aligned}$$

Per l'ultima equazione si ha

$$x_1 = -34 + 110t_1 \quad , \quad x_2 = 4 + 110t_2 \quad , \quad x_3 = 5 - 12t_1 + 27t_1 .$$

*) Se però il coefficiente dell'incognita x_{h+2} divide tutti gli altri coefficienti dell'equazione risultante e il termine noto, la x_{h+2} si esprimerà subito in funzione degli stessi parametri $t_1, \ldots, t_h$.

Da questi valori sostituendoli nella penultima equazione si ha subito
$$x_4 = 44 - 102t_1 + 257t_2 \,,$$
e infine sostituendo nella precedente, si ha
$$x_5 = 7 - 14t_1 + 59t_2 \,.$$
Volendo i minimi valori positivi si porrà $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ e si ha
$$x_1 = 76 + 110t_1 \,,$$
$$x_2 = 114 + 110t_1 \,,$$
$$x_3 = 20 - 12t_1 + 27t_2 \,,$$
$$x_4 = 199 - 102t_1 + 257t_2 \,,$$
$$x_5 = 50 - 14t_1 + 59t_2$$
*).

Esempio 2.°

$$2x+3y+4z+2u+6v=61 \,,$$
$$x+y+5z+2u+3v=42 \,,$$
$$3x+2y+z+3u+v=24 \,.$$

$$3v+x+y+5z+2u=42 \,,$$
$$8x+5y-2z+7u=30 \,,$$
$$-y+6z+2u=23 \,.$$

$$y=3-10t_1+6t_2 \,,$$
$$z=4-2t_1+t_2 \,,$$
$$u=1+t_1 \,.$$

Sostituendo nella 2^a si ha
$$8x-39t_1+28t_2=16 \,,$$
$$x=-60-140l_1+39l_2 \,,$$
$$t_1=-12-28l_1+8l_2 \,,$$
$$t_2=-1+l_1 \,.$$

Sostituendo i precedenti valori nella 1^a si ha
$$v+125l_1-35l_2=-50$$
e quindi
$$v=-30+50k_1+35k_2 \,,$$
$$t_1=-3+5k_1+k_2 \,,$$
$$t_2=-1+k_1 \,.$$

E si conchiude che le soluzioni del sistema son date dalle formole
$$x=-37+55k_1+39k_2 \,,$$
$$y=83-114k_1-80k_2 \,,$$
$$z=20-23k_1-16k_2 \,,$$
$$u=-7+12k_1+8k_2 \,,$$
$$v=-30+50k_1+35k_2 \,.$$

Una soluzione positiva del sistema è
$$x=2 \,,\ y=3 \,,\ z=4 \,,\ u=1 \,,\ v=5$$
**).

---

*) Cfr. D'Andrea, *Trattato elementare di Aritmetica ed Algebra*. Vol. II. Napoli 1840, p. 335 e 336.

**) Testi, *Complementi d'Algebra*, p. 186.

26. APPLICAZIONI. *Decomporre la frazione* $\frac{A}{B}$ *in frazioni parziali che abbiano per denominatori i rispettivi fattori primi che entrano in* B.

Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sono i fattori di B, bisognerà che sia

$$\frac{A}{B} = \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} + \cdots + \frac{x_n}{a_n}$$

e quindi

$$A = (a_2 a_3 \ldots a_n) x_1 + (a_1 a_3 \ldots a_n) x_2 + \cdots + (a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}) x_n ,$$

la quale è sempre risolvibile in numeri interi, qualora $a_1 \ldots a_n$ siano primi fra loro.

27. *Trovare un numero positivo minore di 105 che diviso per 3, 5, 7 dia per resti 2, 3, 4.*

Sia x il numero, e siano rispettivamente q, q', q'' i tre quozienti ed in generale r, r', r'' i tre resti; sarà

$$a = 3q + r = 5q' + r' = 7q'' + r'' .$$

Dall' eguaglianza

$$3q + r = 5q' + r'$$

risulta

$$3q - 5q' = r' - r , \qquad (1)$$

e poiché dell'equazione $3q - 5q' = 1$ una soluzione è $2, 1$, risulta che le soluzioni della (1) sono

$$q = 2(r' - r) + 5t ,$$
$$q' = r' - r + 3t .$$

Col valore di q', sostituendolo in $5q' + r'$, si ha

$$x = 15t + 6r' - 5r = 7q'' + r'' ,$$

e quindi l' equazione

$$7q'' - 15t = -5r + 6r' - r'' . \qquad (2)$$

Una soluzione dell' equazione $7q'' - 15t = 1$ è $-2, 1$, quindi le soluzioni dell' equazione (2), sono

$$q'' = 10r - 12r' + 2r'' + 15u ,$$
$$t = 5r - 6r' + r'' + 7u .$$

Col valore di q'' si deduce che

$$x = 70r - 84r' + 15r'' + 105u .$$

Volendo i coefficienti di r, r', r'' tutti positivi si ponga

$$u = r' + v ,$$

e si ha

$$a = 70r + 21r' + 15r'' + 105v .$$

Per r, r', r'' eguali rispettivamente a 2, 3, 4 si ha

$$x = 2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 15 + 105v .$$

E perciò il numero cercato minore di 105 si ha per $v = -2$, ed è

$$x = 2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 15 - 210 = 53 \text{ *)}.$$

28. *Risolvere in numeri interi il sistema* **)

$$x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4)$$
$$x_1 + x_3 = 3(x_2 + x_4)$$
$$x_1 + x_4 = 4(x_2 + x_3) .$$

Indicando con s la somma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, si ha

$$x_3 + x_4 = s - (x_1 + x_2)$$

e perciò dalla prima equazione si ha $x_1 + x_2 = \frac{2}{3} s$.

Analogamente dalla seconda si ha $x_1 + x_3 = \frac{3}{4} s$,

e dalla terza si ha $x_1 + x_4 = \frac{4}{5} s$, $\quad (a)$

e sommando
$$2x_1 + s = \frac{133}{60} s ,$$

$$x_1 = \frac{73}{120} s .$$

---

*) In questa formola consiste la *Regola di Ta-yen* (un matematico cinese del 3° secolo dopo C.) che Leonardo Fibonacci da Pisa fece conoscere in Europa col suo *Liber Abbaci* nel 1202 (p. 304 dell' Edizione di Boncompagni 1857-62).

**) Questo sistema è riportato da Giamblico da Calcide, filosofo neoplatonico, vissuto nel 4° secolo dopo C. come applicazione del metodo detto *epantema* dato da Timarida da Taranto discepolo di Pitagora. Il metodo è quello col quale si risolve il sistema (a).

Si deduce immediatamente che

$$x_2 = \frac{2}{3} s - \frac{73}{120} s = \frac{7}{120} s ,$$
$$x_3 = \frac{3}{4} s - \frac{73}{120} s = \frac{17}{120} s ,$$
$$x_4 = \frac{4}{5} s - \frac{73}{120} s = \frac{23}{120} s .$$

Per $s = 120t$, si hanno le soluzioni intere e positive del sistema.
Per $t = 1$, si ha la soluzione più semplice

$$73 , 7 , 17 , 23 .$$

29. *Dati i prezzi* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *delle unità delle diverse sostanze che si vogliano mescolare, determinare la quantità* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *di ciascuna sostanza, affinché il miscuglio di quantità* p *che risulta abbia per prezzo unitario* k.

Il problema dà luogo alle seguenti equazioni:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = k(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p .$$

La prima si muta in

$$(a_1 - k)x_1 + (a_2 - k)x_2 + \cdots + (a_n - k)x_n = 0 \qquad (b)$$

ed eliminando x_1 fra questa e la seconda si ha

$$(a_2 - a_1)x_2 + (a_3 - a_1)x_3 + \cdots + (a_n - a_1)x_n = p(k - a_1) ,$$

equazione indeterminata che si sa risolvere.

Se invece non è assegnata la quantità p si dovrebbe risolvere la sola equazione (*b*).

Questo problema è detto di *miscuglio*; analogamente si risolvono i problemi di *alligazione*.

P. es. *Si voglia fare una lega al titolo di 0,900 con oro del titolo di 0,906 e con altro del titolo di 0,877.*

Si avrà

$$906x_1 + 877x_2 = 900(x_1 + x_2) ,$$

quindi

$$6x_1 - 23x_2 = 0$$

dalla quale si deduce che

$$\frac{x_1}{x_3}=\frac{23}{6},$$

e quindi si conchiude che bisogna mescolare le due qualità di oro nel rapporto di 23 a 6, numeri che risultano dalle differenze 900 — 877, 906 — 900 *). Se fosse stato data la quantità che si voleva formare della lega, il problema, in questo caso, sarebbe determinato.

§ 5. — Equazione pitagorica.

30. È notevole nell'analisi indeterminata la ricerca delle soluzioni intere dell'equazione di 2° grado, detta *pitagorica*,

$$x^2+y^2=z^2,$$

che geometricamente significa:

Trovare quali numeri interi possono rappresentare le misure dei lati di un triangolo rettangolo **).

Con questo problema usciamo dall'argomento dell'analisi indeterminata di 1° grado, ma crediamo che pel suo inte-

---

*) Cfr. *Ar. part. e gen.*, 2ª ed., p. 435: oppure *Ar. ed Alg.*, p. 714 e 715.

**) *Se fra 3 numeri a b c esiste la relazione*

$$a^2=b^2+c^2$$

i tre numeri sono misure dei lati di un triangolo, e questo è rettangolo.

Infatti, essendo

$$b^2+c^2+2bc>b^2+c^2$$

risulta

$$(b+c)^2>a^2$$

$$b+c>a\,.$$

Inoltre, essendo

$$b^2+c^2-2bc<b^2+c^2$$

risulta

$$(b-c)^2<a^2$$

$$b-c<a\,.$$

Dunque a è compresa fra $b+c$ e $b-c$, e perciò i tre segmenti sono lati di un △; il quale deve essere rettangolo, perché se non lo fosse, dovrebbe essere $a^2=b^2+c^2\pm 2bc'$ (ove è c' proiezione di c su b); perciò è $c'=0$, e quindi l'angolo A è retto.

resse valga la pena di commettere questa infrazione al titolo del capitolo. *)

1.° (**Sol.** di Pitagora) **), Siano i numeri x, y, z;

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) .$$

Posto

$$z - y = 1$$

si ha

$$z + y = x^2 .$$

Quindi si ha $y = \frac{x^2 - 1}{2}$, $z = \frac{x^2 + 1}{2}$, e perché y e z siano interi deve essere x dispari. Posto $x = 2n + 1$ si hanno per i tre lati i valori

$$x = 2n + 1 \quad , \quad y = 2n^2 + 2n \quad , \quad z = 2n^2 + 2n + 1 .$$

Esempii,

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61)....

2.° (**Sol.** di Platone) ***). Posto $z - y = 2$,

si ha

$$z + y = \frac{x^2}{2} ,$$

quindi

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 \quad , \quad z = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1$$

e perché y e z siano interi deve essere x pari. Quindi

$$x = 2n \quad , \quad y = n^2 - 1 \quad , \quad z = n^2 + 1 .$$

Esempii,

(4, 3, 5), (6, 8, 10), (8, 15, 17), ...

---

*) P. Fermat lasciò enunciato che l'equazione

$$x^n + y^n = z^n$$

per n intero > 2 non è risolvibile in numeri interi; e questa proposizione quantunque dimostrata per diversi valori particolari di n non ha la sua completa dimostrazione. Ora è proposto il vistoso premio di 100.000 marchi a chi la dimostra in generale prima del 13 sett.e 2007. L'Acc. di *Gottingen* è incaricata di giudicare i lavori stampati non prima di due anni dalla loro pubblicazione.

**) Pitagora (vissuto nel 6° sec. a. C. forse dal 569 al 500) nato a Samo è il creatore della scienza geometrica, dell'aritmetica teorica e dell'algebra geometrica.

***) Platone (-429; -348) nato ad Atene fu il gran propugnatore della necessità della coltura matematica per tutti i cittadini dello Stato.

3.° (**Sol.** di Euclide, *Elem.*, libro X, 28 e 29) *).

Posto $x = bc$ (b, c dispari primi fra loro)

si ha $b^2c^2 = (z+y)(z-y)$,

perciò
$$z + y = b^2$$
$$z - y = c^2$$

e quindi i tre lati sono espressi da

$$x = bc \quad , \quad y = \frac{b^2 - c^2}{2} \quad , \quad z = \frac{b^2 + c^2}{2}$$

e con ciò x deve essere necessariamente dispari e i tre numeri saranno primi fra loro, e quindi anche primi fra loro a due a due.

Per es., per le coppie di numeri, 3 , 1 ; 3 , 5 ; 3 , 7 ; ... si hanno le soluzioni: (3 , 4 , 5) , (15 , 8 , 17) , (21 , 20 , 29) ...

È bene tener presente che, trascurando le soluzioni che non hanno i termini primi fra loro, dei tre lati, z deve essere dispari, e dei due cateti l'uno deve essere pari e l'altro dispari. Infatti i cateti non possono essere entrambi pari, ché altrimenti anche z sarebbe pari; e se fossero entrambi dispari e precisamente $2m + 1$, $2n + 1$ si avrebbe

$$(2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$$

e quindi z^2 conterrebbe il fattore 2 a prima potenza, cosa assurda. Dunque resta la possibilità che x ed y siano uno pari e l'altro dispari, ed allora z risulta dispari.

31. Che questa soluzione di Euclide fornisca tutte le terne di numeri che, essendo primi fra loro, soddisfano la equazione pitagorica, comprese quelle in cui x è pari, si dimostra nel seguente modo **).

Dalla equazione
$$x^2 = (z+y)(z-y)$$
si deduce che $z+y$, $z-y$ non possono avere un divisore

*) Euclide vissuto nel 3° secolo a. C. (forse dal 300 al 275) è l'autore dei celebri *Elementi* e di altre opere anche più importanti di questi.

**) Capelli, *Analisi Algebrica*, 3 ed., 1902, p. 78 a 80.

dispari comune, ché altrimenti esso dividerebbe la loro somma $2z$ e la loro differenza $2y$, e quindi (essendo dispari) dividerebbe anche y e z.

Se p è divisore primo dispari di $z+y$, supposto che sia p^λ la massima potenza di p che divide $z+y$, dovrà anche p^λ essere la massima potenza che divide x^2, quindi λ è pari, perciò indicando con u e v dei numeri dispari primi fra loro (ma non necessariamente primi) deve essere

$$z+y=2^m u^2 \quad , \quad z-y=2^n v^2 ,$$

quindi

$$z=\frac{2^m u^2+2^n v^2}{2} \quad , \quad y=\frac{2^m u^2-2^n v^2}{2} ,$$

quindi

$$x^2=(z+y)(z-y)=2^{m+n}u^2v^2 .$$

Sicché risulta

$$x=2^{\frac{m+n}{2}}uv \quad , \quad y=\frac{2^m u^2-2^n v^2}{2} \quad , \quad z=\frac{2^m u^2+2^n v^2}{2} .$$

con $m+n$ pari e m, n entrambi $=0$ o $\neq 0$.

Discussione:

Per $m=n=0$ si ricade nelle formole di Euclide.

Per $m=1+\mu, n=1+\nu$ (μ e ν interi positivi) si avrebbero le formole di risoluzione

$$x=2.2^{\frac{\mu+\nu}{2}}uv \quad , \quad y=2^\mu u^2-2^\nu v^2 \quad , \quad z=2^\mu u^2+2^\nu v^2 .$$

dove però μ o ν deve essere $=0$, e l'altro $=2k$, perché altrimenti x, y, z avrebbero un divisore comune 2. Quindi le soluzioni ulteriori possono essere soltanto:

$$x=2^{k+1}uv \;,\; y=4^k u^2-v^2 \;,\; z=4^k u^2+v^2 ;$$

oppure

$$x=2^{k+1}uv \;,\; y=u^2-4^k v^2 \;,\; z=u^2+4^k v^2$$

dove x è necessariamente pari.

Ma queste con lo scambio del cateto x con y fanno diventare x dispari; dunque queste risoluzioni devono ricadere anche esse in quelle di Euclide.

Perciò quelle di Euclide danno tutte le soluzioni possibili.

Esercizi.

1. Risolvere in numeri interi l'equazione $7x = 1000 - 24y$.

2. Risolvere in numeri interi l'equazione $43x - 72y = 10000$.

3-10. Risolvere in numeri interi e positivi le seguenti equazioni:

$17x + 23y = 183$ (R. 4, 5, unica sol. pos.)

$163x - 191y = 231$ (R. 135, 114)

$19x + 5y = 191$

$13x + 19y = 1170$

$261x + 145y = 2407$

$9x - 11y = 8$

$7x - 9y = 29$

$19x - 5y - 119 = 0.$

11. Dividere il numero 100 in due parti di cui una sia divisibile per 7: l'altra per 11. (R. 56, 44).

12. Dividere 243 in 2 parti l'una delle quali sia divisibile per 24 l'altra per 65. (R. $x = 2 - 65t$, $y = 3 + 24t$).

(Questo problema equivale a trasformare la frazione $\frac{243}{24 \cdot 65}$ nella somma di due frazioni che abbiano per denominatori 24 e 65 e si trova che essa $= \frac{3}{24} + \frac{2}{65}$).

13. Dividere il numero 1800 in due parti tali che l'una sia multipla di 9 l'altra di 11. (19 sol. o 18 secondo che si accetta che una parte sia o non 0).

14. Trovare un numero che diviso per 5 dia per resto 3, e diviso per 9 dia per resto 8. (R. $x = 45t + 8$).

15. Cercare i numeri che divisi per 27 diano per resto 14 e divisi per 37 diano per resto 25. (R. $x = 284 + 999t$).

16. Trovare un numero che diviso per 9 dia per resto 5 e diviso per 10 dia per resto 9.

17. Risolvere in numeri interi e positivi il sistema:

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 7z &= 560 \\ 9x + 25y + 49z &= 2920 \end{aligned} \qquad \text{R.} \left\{ \begin{aligned} x &= -20 + 35t \\ y &= 124 - 44t \\ z &= 15t \end{aligned} \right. \quad \text{per } t = 1,\ 2$$

18. Risolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 5x + 7y - 11z &= 112 \\ 9x + 10y + 7x &= 74 \end{aligned} \qquad \text{R.} \left\{ \begin{aligned} x &= -83 - 159u \\ y &= 80 + 134u \\ z &= 3 + 13u \end{aligned} \right.$$

nessuna soluzione positiva

19. Bisolvere il sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 12y - 9z &= 315 \\ 8x + 3y + 4z &= 360 \end{aligned} \qquad \text{(R. 3 sol.)}$$

20. $2x + 5y - 7z - 22 = 0$
$3x + 4y - 8z = 0$
R. $\begin{cases} x = -14 + 12u \\ y = -2 + 5u \\ z = -16 + 7u \end{cases}$

21. Risolvere in numeri interi e positivi i sistemi:

$$\begin{aligned} 4x + 13y + 5z - 2t &= 2559 \\ -5x + 8y + 7z + 3t &= 1595 \\ -7x + 11y - 3z + 5t &= 2157 \end{aligned}$$
R. $\begin{cases} x = 739u \\ y = 196 - 68u \\ z = 3 + 78u \\ t = 2 + 1231u \end{cases}$ per $u = 1, 2$

22. $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 68 \\ 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 73 \\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 7x_4 &= 30 \end{aligned}$$
R. Una soluzione positiva 2, 3, 4, 5

23. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_3 + 5x_4 &= 35 \end{aligned}$$
R. $\begin{cases} x_1 = 1 - 77u \\ x_2 = 2 + 10u \\ x_3 = 3 + 19u \\ x_4 = 4 + 31u \end{cases}$ Una sol. positiva 1, 2, 3, 4

24. $$\begin{aligned} 19x - 26y + 3z + 7u &= 50 \\ 4x - 35y + 9z + 14u &= 37 \\ 4x - 15y + 3z + 7u &= 24 \end{aligned}$$
R. $\begin{cases} x = 34 + 231m \\ y = 44 + 315m \\ z = 115 + 833m \\ u = 29 + 186m \end{cases}$

25. Una persona compra buoi e cavalli; paga i primi 600 lire l'uno, i secondi 930 lire l'uno, e trova che il prezzo di tutti i buoi supera quello dei cavalli di lire 210. Quanti buoi e quanti cavalli ha potuto comprare.

(R. 5 e 3).

26. Una persona ha comprato del panno e della stoffa, il primo a 31 lire al metro, e la seconda a 20 lire al metro; la spesa della stoffa ha superato di 7 lire quella del panno. Quanti metri era il panno e quanti metri la stoffa?

27. Una compagnia di uomini e donne ha speso del danaro in un'osteria, ciascuno uomo ha pagato 3 lire, e ciascuna donna 2 lire, e la spesa di tutti gli uomini ha superato di 9 lire quella delle donne. Quante erano le donne e quanti gli gomini?

28. Trovare un numero che diviso per 2, 3, 4, 5, 6, 7 dia per resti rispettivi 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0. (R. $301 + 420t$).

Questo problema fu risoluto da Cardano nella seguente forma: Una rivenditrice di uova scivola e rompe le sue uova, e richiesta quante fossero le uova risponde che non le sapeva contare, ma che prese a 2 a 2, a 3 a 3, a 4 a 4, a 5 a 5, a 6 a 6, ne rimaneva sempre una, e invece prese a 7 a 7 non ne rimaneva alcuna.

29. Trovare un numero che diviso per 2, 3, 4, 5, 6, 7 dia per resto 1, 2, 3, 4, 5, 0 rispettivamente. (R. $119 + 420m$, risoluto da Bachet).

30. Trovare un numero che sia divisibile per 11, e che diviso per 9 dia per resto 5 e diviso per 10 dia per resto 9. (R. $x = 869 + 990t$).

31. Determinare un numero u in modo che $121u$ diviso per 540 dia per resto 41, $9u$ diviso per 35 dia per resto 34, e $27u$ diviso per 46 dia per resto 11. (R. $u = 3041 + 5040t$).

32. Si cerchi un numero x tale che le espressioni

$$\frac{3x-10}{7}, \frac{11x+8}{17}, \frac{16x-1}{5}$$

siano numeri interi. (R. $x=211+7\cdot5\cdot17t$).

33. Trovare un numero che, diviso per 5, 7, 11, dia per resti 3, 5, 8, rispettivamente. (R. $x=385t+173$).

34. $2x_1-6x_2+3x_3=30$ R. $\begin{cases} x_1=-30-6x_2+3m \\ x_3=30+6x_2-2m \end{cases}$

35. $2x_1+6x_2-3x_3=60$ R. $\begin{cases} x_1=120-12x_2+3m \\ x_3=60-6x_2+2m \end{cases}$

36. $10x_1-6x_2-15x_3=300$ R. $\begin{cases} x_1=120+12m_1+3m_2 \\ x_2=5m_1 \\ x_3=60+6m_1+2m_2 \end{cases}$

37. $\begin{matrix} 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=18 \\ 4x_1+3x_2-5x_3-11x_4=15 \end{matrix}$ R. $\begin{cases} x_1=x_1 \\ x_2=120-23x_1+2x_4 \\ x_3=69-13x_1-x_4 \\ x_4=x_4 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 3x+y+\frac{1}{3}z+\frac{1}{2}t=100 \\ x+y+z+t=100 \end{cases}$ (Tartaglia ne trovò una soluz., Bachet 226)

39. $\begin{cases} 12x+3y+z+\frac{1}{2}u+\frac{1}{5}v=200 \\ x+p+z+u+v=200 \end{cases}$ (» » , Bachet 6639)

40. $\begin{matrix} 3x_1+4x_2+6x_3+9x_4=67 \\ 5x_1+10x_2-12x_3+24x_4=77 \end{matrix}$ R. $\begin{cases} x_1=-1087-582m_1-54m_2 \\ x_2=676+351m_1+33m_2 \\ x_3=104+54m_1+5m_2 \\ x_4=2m_1 \end{cases}$

Una sola soluzione positiva 5, 4, 3, 2

41. $\begin{matrix} 14x_1-2x_2-3x_3-4x_4=74 \\ 15x_1-10x_2-6x_3=45 \end{matrix}$ R. $\begin{cases} x_1=981+398m_2+24m_1 \\ x_2=981+399m_2+24m_1 \\ x_3=810+330m_2+20m_1 \\ x_4=2322+946m_2+57m_1 \end{cases}$

Infinite soluzioni positive

42. $\begin{matrix} 6x_1+8x_2+7x_3+6x_4=137 \\ 9x_1+12x_2+5x_3-8x_4=14 \end{matrix}$ R. $\begin{cases} x_1=-17+86m_1+4m_2 \\ x_2=17-86m_1-3m_2 \\ x_2=7+34m_1 \\ x_4=9-11m_1 \end{cases}$

Una sola soluzione positiva 3, 2, 7, 9

43. $\begin{matrix} 3x-5y+13z-221u+11v=249 \\ 2x+5y-17z+141u+131v=116 \\ 7x-5y+13z-11u+13v=47 \end{matrix}$ R. $\begin{cases} x=3+20t \\ y=-10387-10389u+3703t \\ z=-3886-3887u+1355t \\ v=-107-109u+40t \end{cases}$

44. $24x_1 + 18x_2 + 41x_3 + 15x_4 + 10x_5 = 223.$

$$\text{R.}\quad \begin{cases} x_1 = 852 - 120m_4 - 30m_3 + 7m_2 - 3m_1 \\ x_2 = -852 + 120m_4 - 30m_3 + 7m_2 + 4m_1 \\ x_3 = -142 + 20m_4 + 5m_3 - m_2 \\ x_4 = 71 - 10m_4 - 2m_3 \\ x_5 = 1 + 3m_4 \end{cases}$$

17 soluzioni positive:

x_1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 4 5
x_2 1 1 4 4 4 5 1 6 1 1 1 2 2 3 3 1 2
x_3 3 3 1 1 1 2 1 1 1 1 1 2 2 1 1 2 1
x_4 1 3 1 3 5 1 1 1 3 5 7 1 3 1 3 1 1
x_5 4 1 7 4 1 1 10 1 7 4 1 4 1 4 1 1 1

45. Trenta persone, tra uomini, donne e fanciulli, spesero 50 lire in un albergo. Lo scotto di un uomo fu di 3 lire, quello di una donna di 2 lire e quello di un fauciullo di 1 lira. Quanti erano gli uomini, quante le donne e quanti i fanciulli? (R. Nove soluzioni $x = t$, $y = 20 - 2t$, $z = 10 + t$).

46. Un mercante ha comprato 100 capi di pollame, fra capponi, pollastri e pulcini, per 100 lire; i costi rispettivi sono lire 3 e $\frac{1}{2}$, 1 e $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ per ogni capo. Trovare il numero dei capponi, dei pollastri e dei pulcini.

47. 41 persone a banchetto spendono 40 lire. Un uomo paga 4 lire, una donna paga 3 lire, un fanciullo $\frac{1}{3}$ di lira. Quanti sono gli uomini, le donne e i fanciulli?

48. Trovare un numero di 3 cifre che diminuito di 255 e diviso per 3 dia per quoziente un numero colle stesse cifre in ordine inverso. (R. 912).

49. Trovare un numero di 4 cifre che sia eguale a 334 volte la somma delle cifre. (R. 1002, 2004, 3006, 4008, 3340, 4342, 5344, 6346, 7348, 6680, 7682, 8684, 9686).

50. Scomporre la frazione $\frac{713}{420}$ in frazioni parziali di denominatori 4, 15, 7. (R. una soluz. pos., 1, 11, 5)

CAPITOLO QUINTO.

FUNZIONI FINITE. LIMITI. APPLICAZIONI.

§ 1. — Funzioni finite. Tendenza al limite.

1. Funzione finita. *Sia* f(x) *una funzione definita di* x *in un intervallo* (a, b), *se esistono due numeri* A, B *tali che* (*essendo* A < B) *per ogni valore di* x *dell'intervallo* (a, b) *si abbia*

$$A < f(x) < B,$$

si dice che la funzione f(x) *è finita nell'intervallo* (a, b).

Tutti i valori che la funzione $f(x)$ acquista per i diversi valori di x dell'intervallo (a, b) sono tutti compresi nell'intervallo (A, B) *).

2. Quando A va crescendo e B va diminuendo può darsi che si finisca col pervenire a due numeri L, L′ tali che nell'intervallo (L . L′) cadano ancora tutti i valori della funzione, ma non succede più lo stesso se si considera invece l'intervallo $(L+\varepsilon, L'-\varepsilon)$ ove ε sia un numero piccolissimo a piacere. In tal caso i numeri L, L′ si dicono *limite inferiore* e *limite superiore* dell'insieme dei valori della funzione $f(x)$ in quell'intervallo (a, b), e quindi si dicono pure *limite inferiore* e *limite superiore* della funzione stessa.

Ciascuno di questi limiti può coincidere con un valore della fnnzione, ma non sempre ciò accade; però quando ciò avviene L, L′ sono il *minimo* ed il *massimo* valore della funzione. La differenza L′—L si dice *oscillazione* della funzione.

Si può quindi conchiudere:

Il limite **inferiore** *della funzione è il* **massimo** *numero non maggiore di alcun valore della funzione*;

Il limite **superiore** *della funzione è il* **minimo** *numero non minore di alcun valore della funzione.*

---

*) Richiamiamo come già note dall'*Algebra* (Cap. I) le definizioni di *ampiezza di un intervallo*, di *variabile indipendente*, di *funzione definita* e *non definita*, di *funzione inversa*. (Cfr. anche *Aritm. ed Algebra* Cap. V; *Aritm. gen. ed Algebra* Cap. II).

Per es. la funzione $\frac{1}{x}$ per $x \geqq 1$ prende dei valori che hanno per limite inferiore 0, e per limite superiore 1; però 0 *non è minimo* della funzione, mentre 1 ne è il *massimo*; invece la funzione $\frac{1}{x}$ per $x > 1$ ha gli stessi limiti superiori e inferiori, nessuno dei quali è raggiungibile.

3. Teorema. *Ogni insieme finito, e quindi anche ogni funzione finita, ammette il limite inferiore ed il timite superiore.*

Per dimostrare che esiste il limite inferiore, operiamo una spartizione dei numeri reali in modo che in una classe (classe inferiore) siano tutti i numeri l non maggiori di alcun numero dell' insieme e nell' altra classe (classe superiore) quei numeri l' che sono maggiori di qualche numero dell' insieme. Nella classe inferiore vi saranno numeri tutti minori di qualunque numero l' della classe superiore, perché per dire che l' appartiene alla classe superiore occorre che sia l' maggiore di un numero $f(\alpha)$ dell' insieme che a sua volta è $\geqq$ a qualche numero l.

La spartizione suddetta dei numeri definisce perciò un numero reale L (*Aritm. part. e gen.*, Cap. VI, n. **41** *).

Inoltre nella classe superiore non può esistere un numero L_1 minore di tutti gli altri, perché dovendo essere L_1 maggiore di qualche numero $f(\alpha)$ dell' insieme ogni numero compreso fra $f(\alpha)$ ed L_1 apparterrebbe alla stessa classe. Dunque il limite L fra le due classi è il massimo dei numeri l e quindi è il limite inferiore.

Analogamente si dimostrerebbe l'esistenza del limite superiore L'.

4. Tendenza al limite della variabile indipendente.

a) Si dice che una variabile indipendente x *tende al limite* a, *quando esso può assumere tutti i valori dell' intorno di* a, (a—k, a+k), *escluso il valore* a. Ciò si esprime scrivendo

$$\lim x = a\ .$$

b) Si suole anche distinguere il caso in cui x prende i valori soltanto dell'*intorno destro* $(a, a+k)$ o soltanto

---

*) Cfr. pure *Aritm. ed Alg.*, Cap. XVI, **43**.

dell'*intorno sinistro* $(a-k, a)$, escluso sempre l'estremo a. Nel primo caso si scrive $x=a+0$, nel secondo $x=a-0$.

c) Si dice che una variabile indipendente x *è infinitamente piccola, o infinitesima, quando tende al limite* 0, *cioè quando finisce col diventare e restare minore in valore assoluto di qualunque numero positivo* ε. Ciò si esprime scrivendo

$$\lim x = 0 \,.$$

Per esempio, supposto che ε sia $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$ la x deve potere diventare e restare minore di qualunque di questi numeri.

d) Si dice che una variabile indipendente x *tende all'infinito positivo, o tende a divenire infinitamente grande, o che diviene eguale a* ∞, *quando finisce col diventare e restare maggiore di qualunque numero* N. Ciò si esprime scrivendo

$$\lim x = \infty \,.$$

e) Si dice che una variabile indipendente x *tende all'infinito negativo, o che diviene eguale a* $-\infty$, *quando finisce col diventare e restare minore di qualunque numero negativo* $-$N. Ciò si esprime scrivendo

$$\lim x = -\infty \,.$$

5. Una variabile che tende all'infinito positivo o negativo deve finire col mantenersi sempre positiva o sempre negativa. Se invece la variabile pur diventando in valore assoluto infinitamente grande non conserva un segno determinato, non ha alcun limite.

Invece una variabile infinitamente piccola ha sempre per limite zero, sia che conservi il suo segno, sia che lo cambi col prendere dei valori a destra e a sinistra di 0.

6. TENDENZA AL LIMITE DELLA FUNZIONE. *Si dice che i valori di una funzione* $y=f(x)$, *a destra di* a, *tendono al limite* A, *quando tendendo* x *ad* a, *nell'intorno destro, la differenza* $|y-A|$ *tende al limite* 0; *cioè quando scelto un*

numero ε *arbitrariamente piccolo, se ne può trovare un altro* h *tale che per qualunque valore di* x *nell'intorno* (a, a + h) *si abbia*

$$|y - A| < \varepsilon .$$

Ciò si indica scrivendo

$$\lim_{x=a+0} f(x) = A .$$

Analogamente si definisce il limite di $f(x)$ a sinistra di a e se esso è B si scrive

$$\lim_{x=a-0} f(x) = B .$$

Quando si vuole indicare che il limite di $f(x)$ a destra di a è eguale al limite di $f(x)$ a sinistra di a, si scrive

$$\lim_{x=a} f(x) = A .$$

Si badi che non bisogna confondere il $\lim\limits_{x=a} f(x)$ col valore $f(a)$. Il valore $f(a)$ può non esistere, ed esistere il limite.

Così per es. della funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{x}$ non esiste il valore $f(0)$, ma esiste il $\lim\limits_{x=0} f(x)$ che è 0, perché, per $x \neq 0$, $f(x) = x$; così pure della funzione $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ non esiste il valore $f(0)$, ma esiste il $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$, che come si sa dalla Trigonometria, è 1.

7. a) *Si dice che, per* $x = \infty$ *la funzione* $y = f(x)$ *tende al limite* A, *quando per* x *maggiore di qualunque numero* N *si abbia sempre*

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Ciò si indica scrivendo

$$\lim_{x=\infty} f(x) = A .$$

b) *Si dice che per* x *tendente ad* a *(a destra o a sinistra) la funzione* $y = f(x)$ *tende all'infinito, quando tendendo* x *ad* a *(a destra o a sinistra)* f(x) *diviene maggiore di qualunque numero positivo* N.

Ciò si indica scrivendo

$$\lim_{x=a+0} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x=a-0} f(x) = \infty \ .$$

c) *Si dice che, per* x = ∞, f(x) *tende all'infinito, quando per* x *maggiore di qualunque numero positivo* N, *anche* f(x) *può divenire maggiore di qualunque numero positivo.*

Ciò si indica scrivendo

$$\lim_{x=\infty} f(x) = \infty \ .$$

Soltanto per abbreviare il linguaggio si usa dire che $f(x)$ *è infinita per* $x = a$, oppure che $f(x)$ *è uguale ad* A *o è infinita per* $x = \infty$; e ciò è permesso quando s'intende quel che si vuol significare. Egualmente soltanto in questa ipotesi si permette di poter scrivere

$$f(a) = \infty \quad , \quad f(x) = \mathrm{A} \ ,$$

così come in Trigonometria si permette di scrivere

$$\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2} = \pm\infty$$

per dire che

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{\varepsilon=0} \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty \ .$$

8. TENDENZA AL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE. Quando alla variabile indipendente di una funzione y, si attribuiscono soltanto i successivi valori interi positivi, nel quale caso indicheremo la variabile con n, i valori successivi che assume la funzione formano una *successione* che dicesi *illimitata* e *determinata*, in quanto che si può calcolare il termine della successione quando se ne conosce il posto, cioè il valore di n. Il termine di posto n^{esimo} si indica con y_n.

9. Esempii. 1.° Se $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, si ha la successione

$$-1 \ , \ +\frac{1}{2} \ , \ -\frac{1}{3} \ , \ +\frac{1}{4} \ , \ \ldots \ , \ \frac{(-1)^n}{n} \ , \ \ldots$$

ove, per n crescente all' infinito, il termine $\frac{(-1)^n}{n}$ diventa in va-

lore assoluto minore di qualunque numero positivo, cioè

$$\lim_{x=\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \ ,$$

e si dice perciò che la successione ha per limite zero.

2.° Se $y_n = \frac{1+n}{2+n}$, si ha la successione

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{1+n}{2+n}, \ldots,$$

per la quale la differenza

$$1 - \frac{1+n}{2+n} = \frac{2+n-(1+n)}{2+n} = \frac{1}{2+n}$$

può diventare minore di qualunque numero positivo; quindi

$$\lim_{n=\infty} \frac{1+n}{2+n} = 1 \ ,$$

e tale è quindi il limite della successione.

3.° Se $y_n = \frac{2+n}{2}$, si ha la successione

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \ldots, \frac{2+n}{2}, \ldots,$$

ma
$$\lim_{n=\infty} \frac{2+n}{2} = +\infty \ ,$$

dunque il limite della successione è ∞.

4.° Se $y_n = \frac{3-n}{2}$, si ha la successione

$$\frac{2}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, \frac{3-n}{2}, \ldots,$$

e poiché
$$\lim_{n=\infty} \frac{3-n}{2} = -\infty \ ,$$

a suddetta successione ha per limite $-\infty$.

5.° Se $y_n = \frac{(-1)^n n}{2}$, si ha la successione

$$-\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, \quad \frac{4}{2}, \ldots,$$

i cui termini oscillano tra valori positivi e negativi, crescenti in valore assoluto, e quindi, mentre la variabile diviene infinitamente grande in valore assoluto, la successione non ha alcun limite.

6.° Egualmente la successione determinata dalla variabile $y = (-1)^n$ non ha limite.

10. Si noti che:

a) Se una successione illimitata e determinata

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

ammette un limite, questo limite non cambia, se si sopprimono nella successione quanti termini consecutivi si vogliono a sinistra.

b) Se A è il limite di una successione illimitata e determinata, ed α è un numero positivo; si può sempre assegnare un tal valore p che, per tutti i valori di n maggiori di p, i termini della successione siano compresi tra $A - \alpha$ ed $A + \alpha$; cioè che si abbia per essi

$$A - \alpha < y_n < A + \alpha.$$

In tal caso ogni numero maggiore di $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p$ e di $A + \alpha$ è maggiore di tutti i numeri della successione.

Se $A \neq 0$, è possibile che a partire da un certo termine della successione nessun termine della serie sia zero.

Se $A = 0$, è possibile che da un certo termine della successione tutti i termini siano $< \alpha$.

11. a) *Se i termini di una successione illimitata e determinata non sono decrescenti, e si mantengono tutti inferiori ad un numero dato* N, *la successione ha un limite finito.*

b) *Se i termini di una data successione illimitata e determinata non sono crescenti e si mantengono tutti maggiori di un numero* N, *la successione ha un limite finito.*

Queste proposizioni sono conseguenze del teorema enunciato nel n. 3.

Esempio. Aggiungendo al numero decimale 3,7 ordinatamente le cifre 1, 2, 0 indefinitamente, si hanno i numeri della successione

$$3{,}7 \quad , \quad 3{,}71 \quad , \quad 3{,}712 \quad , \quad 3{,}7120 \quad , \quad 3{,}71201 \quad , \quad \ldots$$

e questa successione ammette necessariamente un limite, perché tutti i numeri di essa sono $< 3{,}8$.

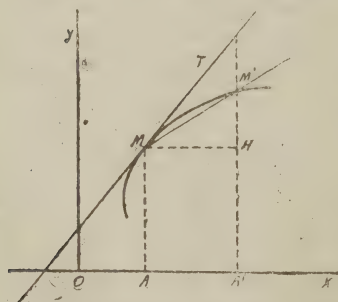
12. *Se* y *e* z *sono due successioni la prima crescente e la seconda decrescente, e tali che mentre sia* $y < z$ *la differenza fra* y *e* z *tende a diventare infinitesima, per* n *crescente all'infinito, le due successioni hanno uno stesso limite.*

Infatti, siccome y è una successione crescente che si mantiene inferiore ad un qualunque valore di z, ammette un limite A, e del pari essendo z decrescente e superiore ad un qualunque valore di y ammette un limite B. Non può essere $A > B$, perché altrimenti vi sarebbero dei valori di y maggiori di quelli di z; né può essere $A < B$, perché altrimenti la differenza $z - y$ non potrebbe diventare minore di $B - A$; dunque non essendo $A \gtrless B$ deve essere $A = B$.

Due successioni che soddisfano alle condizioni del teorema suddetto si dicono *convergenti*.

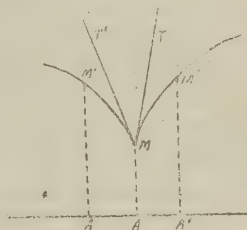
13. APPLICAZIONI GEOMETRICHE DEL CONCETTO DI LIMITE.

a) Tangente.

Sia M il punto del diagramma di una funzione $f(x)$ che corrisponde all'ascissa $OA = x$ e sia M' un punto dello stesso diagramma vicino al punto M, corrispondente all'ascissa $OA' = x + h$. Quando h tende a zero il punto M' si avvicina al punto M, e la segante MM', rotando intorno al punto M tende ad avvicinarsi ad una posizione limite MT in modo che l'angolo TMM' può divenire più piccolo di qualunque angolo quando il punto M' sulla curva tende alla

posizione di M. Questa retta MT, posizione limite della segante MM′, si dice *tangente* alla curva in M.

Nella generalità dei casi la posizione limite MT della segante MM′ è unica sia che il punto M′ si avvicini ad M in un senso sia che si avvicini nell'altro senso (cioè sia che A′ sia a destra o che sia a sinistra di A) ed allora si dice che la curva ha in M una tangente unica.

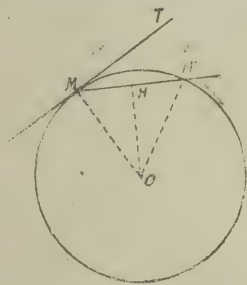
In tal caso la tangente nel punto M è ben determinata dalla curva, e siccome una retta per essere individuata deve passare per due punti, si dice che la tangente in M congiunge due punti della curva infinitamente vicini.

Un punto della curva, nel quale la curva non ha una sola tangente dicesi punto *singolare* della curva. Può avvenire p. es. che se A′ tende ad A a destra si abbia una posizione limite diversa da quella che si ha quando A′ tende ad A a sinistra ed allora il punto M è un punto singolare della curva che in questo caso dicesi punto *angoloso.*

Nel caso particolare della circonferenza, al tendere di M′ ad M, la corda MM′ forma sempre col centro O un triangolo isoscele ed il suo punto medio H congiunto col centro dà una retta perpendicolare alla corda MM′. Questa proprietà si mantiene nella posizione limite della corda quando M′, e quindi H, si avvicina ad M. Perciò la tangente ad una circonferenza in un suo punto è perpendicolare nel punto di contatto al raggio che passa per esso.

b) Lunghezza di un arco di curva.

Sia AB un arco di curva compreso fra i punti A e B e sieno $A_1 A_2 A_3 \ldots$ una successione di punti che si seguono nella curva in un determinato senso.

Immaginiamo la linea spezzata $A A_1 A_2 A_3 \ldots B$, e inoltre che i punti A siano tanto vicini l'uno all'altro da po-

ter considerare i lati della linea spezzata come piccolissimi, supponiamo infine che si passi dalla direzione AA_1 alla direzione A_1A_2 con deviazione piccolissima, cioè supponiamo che l'angolo AA_1A_2 sia poco differente dall'angolo piatto. In queste condizioni la lunghezza della linea spezzata $AA_1A_2 \ldots B$ resta sempre minore della lunghezza dell'arco, che si potrebbe avere avvolgendo teoricamente un filo sull'arco AB cogli estremi in A e B e rettificandolo dopo, ed è poco differente da esso. L'errore che si commette sostituendo alla lunghezza dell'arco quella del perimetro della linea spezzata è piccolissimo e si può rendere sempre più piccolo facendo diminuire indefinitamente i lati coll'aumentare indefinitamente il numero dei vertici.

Il limite a cui tende il perimetro della linea poligonale inscritto nell'arco dato AB *allorchè, aumentando indefinitamente il numero dei vertici, i lati di questa linea tendono a zero, si dice* **lunghezza** *dell'arco* AB *).

14. Osservazioni sulle variabili. Per quanto qui segue useremo la parola variabile per esprimere indifferentemente variabili indipendenti o funzioni o successioni.

a) *Se una variabile è compresa fra due variabili infinitesime, essa è pure infinitesima.*

Infatti, il suo valore assoluto non può superare il valore assoluto di entrambe le variabili e quindi deve rimanere inferiore a qualsiasi numero positivo ε.

b) *La somma di un numero finito di variabili infinitamente piccole è pure infinitamente piccola.*

Siano $y, z, \ldots, w$, un numero k di variabili infinitamente piccole, dico che $y + z + \ldots + w$ è pure infinitamente piccola

Infatti, sia ε un numero piccolo a piacere, ciascuna delle variabili può, per ipotesi, rendersi minore di ε/k, quindi la loro somma può rendersi $< \varepsilon$.

---

*) Se si sostituisce alla lunghezza di una circonferenza, che ha per raggio un chilometro, il perimetro di un poligono inscritto, il cui lato sia inferiore o eguale ad un metro, l'errore che si commette è minore di un terzo di millimetro.

Il teorema non è più vero, se la somma contiene infiniti termini.

c) *Se* y *e una variabile infinitamente piccola e* k *è un numero costante, anche* ky *è una variabile infinitamente piccola.*

d) *Se* y *è una variabile infinitesima e* z *è una variabile che tende ad un limite finito* B, *anche il prodotto* yz *è una variabile infinitesima.*

Infatti, sia c un numero positivo maggiore (**10, b**) di $B + \alpha$ e di qualunque valore della variabile z, la variabile yc è pur essa (**c**) infinitesima, quindi yz, che è sempre minore di yc in valore assoluto, deve essere pur essa infinitamente piccola.

e) *Se la variabile* y *tende al limite* A, *la variabile* — y *tende al limite* — A.

Infatti, se $A - y$ è infinitamente piccola, anche

$$-(A - y) = -A - (-y)$$

è infinitamente piccola.

f) *Se* $\lim y = A$, *si ha* $\lim |y| = |A|$.

Difatti, il valore assoluto di $A - y$ è maggiore o uguale al valore assoluto di $|A| - |y|$ e, se la prima è infinitesima, la seconda lo è pure.

g) *Se una variabile tende all'infinito positivo o negativo la variabile inversa è infinitamente piccola, e perciò ha per limite zero; viceversa però, la variabile inversa di una variabile infinitamente piccola è infinitamente grande in valore assoluto, ma può non avere un limite.*

Infatti, se $\lim y = \infty$, y è infinitamente grande, e quindi a partire da un certo suo valore può essere

$$|1/y| < \varepsilon \qquad \text{e quindi} \qquad \lim 1/y = 0.$$

Ma se $\lim y = 0$, si avrà bensì che $\lim |1/y| = \infty$, ma $1/y$ può non finire per avere un segno determinato, così avverrebbe per la inversa della variabile $\dfrac{(-1)^n}{n}$ del 1.° esempio del n. **9**.

§ 2. — Teoremi sui limiti.

15. Teor. I.° *Una variabile* y *non può ammettere simultaneamente due limiti differenti.*

Supponiamo che la variabile y possa ammettere simultaneamente il limite 4 e il limite 9, e consideriamo un nu-

mero qualunque, per es. 7, compreso fra 4 e 9. La variabile y, avendo per limite 4, dovrebbe finire coll'essere minore di 7 ed avendo per limite 9, dovrebbe finire coll'essere maggiore di 7, quindi nello stesso tempo dovrebbe essere $y >$ e < 7, il che è assurdo; dunque è pure assurdo che possano esistere due limiti per y.

16. Teor. 2.° *Se due variabili restano sempre eguali o equivalenti tra loro, ed una di esse ha un limite, l'altra tende allo stesso limite.*

Siano y, z due variabili tali che sempre si abbia $y = z$, ed inoltre suppongasi che y abbia per limite A, dico che

$$\lim z = A .$$

Difatti, per ipotesi, $|A - y| < \varepsilon$, quindi anche

$$|A - z| < \varepsilon, \qquad \text{e perciò} \qquad \lim z = A .$$

Così, per esempio, essendo, per $y \neq z$

$$\frac{y^2 - z^2}{y - z} = y + z ,$$

si ha pure

$$\lim \frac{y^2 - z^2}{y - z} = \lim (y + z) .$$

17. Teor. 3.° *Se* y *e* z *sono due variabili che tendono allo stesso limite* A, *e* v *è una variabile sempre compresa fra* y *e* z *essa avrà pure per limite* A.

Infatti, se per ipotesi v è compresa fra y e z, la differenza $v - A$, sarà compresa fra le due differenze $y - A$, e $z - A$; ma queste ultime differenze sono infinitesime,

perciò il valore assoluto $\quad |A - v| < \varepsilon$,

e quindi

$$\lim v = A .$$

Per es., se $y = \frac{1}{n}, v = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{n}, z = \frac{1}{2n}$, essendo 0 il limite di y e di z, anche v ha per limite zero.

18. Teor. 4.° *Se* y, z, u ... *sono funzioni di* x *in numero finito, che tendono a limiti determinati, si ha*

$$\lim(y+z+u+\ldots)=\lim y+\lim z+\lim u+\ldots$$

Supponiamo che le funzioni y, z, u abbiano per limiti rispettivamente A, B, C; per la definizione del limite, le differenze

$$y-\mathrm{A} \quad , \quad z-\mathrm{B} \quad , \quad u-\mathrm{C}$$

sono infinitesime. e quindi (**14, b**) la loro somma, che è eguale ad $(y+z+u)-(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})$, è pure infinitesima e perciò

$$\lim(y+z+u)=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}.$$

Coroll. Se la variabile y ha per limite A, e k è una costante la variabile ky ha per limite kA.

Infatti, se $|\mathrm{A}-y|<\left|\frac{\varepsilon}{k}\right|$ anche $|k\mathrm{A}-ky|<\varepsilon$.

19. Teor. 5.° *Se* y, z *sono funzioni di* x *che tendono a limiti determinati,*

$$\lim(y-z)=\lim y-\lim z.$$

Supponiamo che y e z abbiano per limiti rispettivamente A e B; essendo $\lim(-z)=-\mathrm{B}$ (**14, e**) si ha $\lim(y-z) = \lim|y+(-z)| = \lim y+\lim(-z)=\mathrm{A}-\mathrm{B}$.

20. Teor. 6.° *Se* y, z, u, ... *sono funzioni di* x *in numero finito, che tendono a limiti determinati, si ha*

$$\lim(y\cdot z\cdot u)=\lim y\cdot\lim z\cdot\lim u.$$

1.° Considériamo dapprima il caso di due variabili y e z.

Sottraendo e aggiungendo alla differenza $\mathrm{AB}-yz$ il prodotto $\mathrm{A}z$, si ha

$$\mathrm{AB}-yz=(\mathrm{AB}-\mathrm{A}z+\mathrm{A}z-yz)=\mathrm{A}(\mathrm{B}-z)+z(\mathrm{A}-y).$$

Ma le differenze $\mathrm{B}-z$, $\mathrm{A}-y$ sono infinitesime per ipo-

tesi, quindi anche i prodotti $A(B-z)$, $z(A-y)$ sono infinitesimi (**14**, **c**, **d**) e perciò la loro somma (**14**, **b**) è infinitesima, e quindi $\lim(yz) = AB$.

2.° Consideriamo il caso di più variabili. Il prodotto yzu si può considerare di due fattori yz ed u, quindi per il caso precedente,

$$\begin{aligned}\lim\{(y\cdot z)\cdot u\} &= \lim(yz)\lim u\\ &= A\cdot B\cdot C\\ &= \lim y\cdot\lim z\cdot\lim u.\end{aligned}$$

Coroll. *Il limite di una potenza ad esponente intero e positivo di una variabile, che ha un limite determinato, è eguale alla stessa potenza del limite della base.*

Dico cioè che $\lim y^p = A^p$, per p intero positivo.

Infatti, $\lim y^p = \lim(\overset{1}{y}\cdot\overset{2}{y}\cdot\overset{3}{y}\cdot\overset{\cdots}{\ldots}\cdot\overset{p}{y})$

$$= \overset{1}{\lim}\, y\cdot\overset{2}{\lim}\, y\cdot\overset{3}{\lim}\, y\cdot\ldots\cdot\overset{p}{\lim}\, y = A^p.$$

21. Teor. 7.° *Se la funzione* y *tende al limite* A, *diverso da zero, la sua inversa* $1/y_n$ *tende al limite* $1/A$.

Infatti, $$\frac{1}{y}-\frac{1}{A}=\frac{A-y}{yA}=(A-y)\cdot\frac{1}{yA}$$

e, nel prodotto $(A-y)\cdot\frac{1}{yA}$, il fattore $A-y$ è una variabile infinitesima, ed il fattore $\frac{1}{yA}$ è una variabile che (per α positivo $\neq 0$) finisce (**10**, **b**) col diventare $<\frac{1}{(A-\alpha)A}$, che è un numero finito; quindi (**14**, **d**) il prodotto finisce col diventare infinitesimo, e perciò $\frac{1}{y}-\frac{1}{A}<\varepsilon$; quindi è vero che $\lim\frac{1}{y}=\frac{1}{A}$.

Dal teorema è escluso che il limite di y possa essere zero. Però si noti che, se y tende a zero serbandosi posi-

tiva $\lim \frac{1}{y} = +\infty$, e che, se invece tende a zero serbandosi sempre negativa, si ha $\lim \frac{1}{y} = -\infty$.

22. Teor. 8.° *Se* y, z *sono funzioni che tendono a limiti determinati*, $\lim \frac{y}{z} = \frac{\lim y}{\lim z}$, *purché sia* $\lim z \neq 0$.

Supponiamo che y e z tendono ai limiti A e B e sia $B \neq 0$, dico che

$$\lim \frac{y}{z} = \frac{A}{B}.$$

Infatti,

$$\lim \frac{y}{z} = \lim \left(y \cdot \frac{1}{z}\right) = \lim y \cdot \lim \frac{1}{z} = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}.$$

23. Avvertenze ed Esempii. 1.° Se y è una variabile che tende ad un limite finito A, e z è una variabile che tende a diventare infinitamente grande positiva o negativa, si ha (**14**, g)

$$\lim \frac{y}{z} \text{ *)} = \lim \left(y \cdot \frac{1}{z}\right) = \lim y \cdot \lim \frac{1}{z} = A \times 0 = 0.$$

2.° Se z è una variabile infinitesima che si mantiene sempre positiva, ed y è una variabile positiva che ha per limite $A > 0$, supposto α positivo, si ha

$$\lim \frac{y}{z} \text{ **)} > \lim \frac{A - \alpha}{z} \quad \text{e quindi} \quad \lim \frac{y}{z} = \infty.$$

Gli esempi 1.° e 2.° completano le cognizioni sul limite del quoziente

---

*) Se nella frazione $\frac{y}{z}$ si sostituisse ad ogni termine il suo limite, si avrebbe la frazione $\frac{A}{\infty}$, che non ha significato.

**) Se nella frazione $\frac{y}{z}$ si sostituisse ad ogni termine il suo limite, si avrebbe $\frac{A}{0}$, che non ha significato.

3.° Se y e z sono due variabili che tendono allo stesso limite A,

$$\lim \frac{y^2 - z^2}{y - z} \text{ *)} = \lim (y + z) = \lim y + \lim z = 2A .$$

24. La radice dell' equazione $ax + b = 0$ non ha significato se $a = 0$, invece essa assume un significato preciso se si suppone che a tende a zero nel senso positivo o nel senso negativo.

Infatti, $$\lim_{a=0} x = \lim_{a=0} \frac{-b}{a}$$

e quindi, supposto b positivo,

$$\lim_{a=+0} x = -\infty \quad , \quad \lim_{a=-0} x = +\infty .$$

25. Se il coefficiente a del primo termine dell'equazione di secondo grado fosse zero, l'equazione si ridurrebbe ad essere di primo grado della forma

$$bx + c = 0 ,$$

e quindi avrebbe una sola radice

$$x = -\frac{c}{b} .$$

Supponiamo invece che il coefficiente a sia variabile e che tenda al limite zero, conservando nell' intorno di zero sempre il medesimo segno, e cerchiamo quali sono i limiti a cui tendono le radici quando a tende al suo limite zero.

Essendo le radici

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ,$$

prendendo il limite di ciascuna di esse, supposto b positivo, si

---

*) Se nella frazione $\frac{y^2 - z^2}{y - z}$ si sostituisse ad ogni variabile il suo limite, si avrebbe l' espressione $\frac{0}{0}$, che non ha significato.

ha rispettivamente:

$$\lim_{a=\pm 0} x_1 = \frac{-b-b}{2\lim a} = -\frac{b}{\lim a} = \mp\infty\ ;$$

$$\lim_{a=\pm 0} x_2 = \lim_{a=+0} \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} =$$

$$= \lim_{a=\pm 0} \frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \lim_{a=\pm 0} \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} = -\frac{c}{b}\ .$$

Dunque, delle due radici, una tende a divenire infinitamente grande del segno di $-b$ o $+b$ secondoché a è positivo o negativo, l'altra tende al limite $-\dfrac{c}{b}$.

Cosicché quando nel risolvere un sistema di due equazioni a due incognite, l'una di 1° e l'altra di 2° grado, se nell'eliminazione di una delle incognite si giunge all'equazione

$$0x^2 + Bx + C = 0\ , \quad \text{ovvero} \quad Bx + C = 0$$

ciò significa che nel limite una delle equazioni del sistema ha per x un valore infinitamente grande; e se si giunge all'equazione

$$0x^2 + 0x + C = 0\ , \quad \text{ovvero} \quad C = 0$$

entrambe le soluzioni del sistema hanno nel limite per x valori infinitamento grandi.

Egual considerazione vale allorquando dall'eliminazione di una incognita, da due equazioni di 2° grado a due incognite, la risultante risulta mancante di uno o più termini dei gradi più elevati.

§ 3. — Applicazioni.

26. APPLICAZIONE AI POLINOMI. Come applicazione delle cose esposte dimostreremo i due seguenti teoremi:

1.° *Il limite di una funzione intera*

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n\ ,$$

per $x = \infty$, *è* ∞ *col segno del termine di grado maggiore.*

Infatti, la funzione suddetta si può scrivere

$$y = x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} \right)$$

e quindi

$$\lim_{x=\infty} y = \lim_{x=\infty} x^n \left(a_0 + \lim \frac{a_1}{x} + \lim \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \lim \frac{a_n}{x^n} \right) = \lim a_0 x^n ,$$

che è infinito positivo o negativo secondo che a_0 è positiva o negativa.

2.° *Il segno di una funzione intera*

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots ,$$

per valori di x *sufficientemente piccoli in valore assoluto, è quello del termine di grado minore.*

Supponiamo dapprima che il termine di grado più basso sia $a_n \neq 0$. Quando x tende a zero si ha

$$\lim_{x=0} y = \lim_{x=0} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n)$$
$$= \lim_{x=0} a_0 x^n + \lim_{x=0} a_1 x^{n-1} + \cdots + \lim_{x=0} a_{n-1} x + a_n$$

e poiché ognuno dei termini del secondo membro, eccetto l'ultimo, tende a 0, risulta che

$$\lim_{x=0} y = a_n ;$$

e quindi per valori di x sufficientemente piccoli in valore assoluto la funzione non è nulla ed ha il segno di a_n.

Supponiamo ora che la funziene abbia per termine di grado più basso $a_{n-h} x^h$ (con $h > 0$, $a_{n-h} \neq 0$). Essendo

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-h} x^h = x^h (a_0 x^{n-h} + a_1 x^{n-h-1} + \cdots + a_{n-h})$$

risulta che per x sufficientemente piccolo in valore assoluto il fattore in parentesi è $\neq 0$ e del segno di a_{n-h}, quindi la funzione y ha per questi valori di x il segno del termine $a_{n-h} x^h$. Se h è pari il segno sarà quello di a_{n-h}, per x positivo o negativo; se h è dispari la funzione y cambia segno con x.

27. Applicazioni ai numeri decimali periodici ed alle generatrici. Se di una frazione decimale periodica semplice o mista (*Aritm. ed Alg.* IV, **64**) si limitano le cifre decimali successivamente all'ultima cifra del primo, del secondo, . . . dell'ennesimo periodo, avremo delle frazioni decimali finite che diconsi 1ª, 2ª, 3ª, . . . , n^{ma} *ridotta* della data frazione periodica.

28. Le successive ridotte di una frazione decimale periodica costituiscono una successione illimitata e determinata di numeri sempre crescenti, che rimangono inferiori al numero intero che superi almeno di un'unità la parte intera del numero decimale periodico, quindi (**II, a**) la successione ammette un *limite finito*. Questo limite dicesi valore della frazione decimale periodica.

29. *Il limite delle successive ridotte di un numero decimale periodico, che ha per periodo* 9, *è il numero che si ottiene sopprimendo le cifre periodiche e aumentando di un'unità l'ultima cifra che rimane a destra.*

Dico cioè che $\lim 3{,}25(9) = 3{,}26$.

Infatti, le differenze

$$3{,}26 - 3{,}259 \,; \quad 3{,}26 - 3{,}2599 \,; \quad 3{,}26 - 3{,}25999 \,; \; \ldots$$

col crescere del numero delle cifre decimali del sottrattore decrescono e finiscono col diventare e restare infinitamente piccole.

In particolare:

La frazione decimale periodica 0,(9) *ha per limite* 1.

Il teorema suddetto si suole brevemente compendiare nelle seguenti eguaglianze,

$$3{,}25(9) = 3{,}26 \quad , \quad 0{,}(9) = 1 \; ,$$

omettendo innanzi al primo membro la parola limite; però ciò non si potrebbe scrivere, essendo che il limite di 0,(9) non si raggiunge qualunque sia il numero delle cifre decimali.

30. **a**) *In ogni numero decimale con infinite cifre una unità di un certo ordine decimale è sempre maggiore o eguale* (cfr. *Aritm. ed Alg.* IV, **54**, **b**) *al limite del numero decimale espresso dalle cifre decimali che seguono.*

Così nel numero

$$5{,}313311333111\ldots \quad \text{è} \quad 0{,}0001 > \lim 0{,}000011333111\ldots$$

e nel numero

$$5{,}37299999\ldots \quad \text{è} \quad 0{,}001 = \lim 0{,}000999\ldots = 0{,}000(9)\ .$$

Affinché due numeri decimali di un numero infinito di cifre decimali siano eguali devono le cifre dell'uno essere rispettivamente eguali alle cifre dell'altro e nello stesso ordine.

31. **a**) *Dicesi* **generatrice** *di un numero decimale periodico la frazione ordinaria (se esiste) che ridotta in decimale riproduce il numero decimale periodico dato.*

b) *La generatrice di un numero decimale periodico (quando esiste) è il limite delle successive ridotte del numero decimale periodico.*

Infatti, sia a/b una frazione ordinaria che ridotta in decimale abbia dato il numero decimale periodico 5,(23); se scriviamo la successione di numeri

$$5{,}23 \quad ; \quad 5{,}2323 \quad ; \quad 5232323 \quad ; \quad \ldots ,$$

la differenza fra a/b e ciascuno di questi numeri è successivamente minore di $1/_{100}$, di $1/_{100^2}$, di $1/_{100^3}$, ... quindi può diventare e restare minore di ε e perciò il teorema è vero.

c) *Un numero decimale periodico non può avere due generatrici differenti*; perché una successione illimitata e determinata di numeri non può ammettere due limiti differenti (**15**).

d) *I numeri decimali periodici che hanno per periodo* 9 *non ammettono alcuna generatrice*; perché altrimenti la successione delle loro ridotte avrebbe due limiti differenti: un numero decimale finito e una frazione ordinaria, non equivalenti.

32. *La generatrice di un numero decimale periodico semplice, che ha per parte intera zero e per periodo un numero qualunque, diverso da 9, è eguale ad una frazione ordinaria, che ha per numeratore il numero intero espresso dalle cifre di un periodo e per denominatore il numero espresso da tanti nove quante sono le cifre del periodo.*

Sia il numero decimale periodico semplice 0,(83) e sia a/b la sua generatrice; siccome dividendo a per b si deve riprodurre la frazione decimale periodica data, si deve avere 0 per parte intera del quoziente, il che importa che sia $a<b$, ed inoltre, arrestando l'operazione ai centesimi, si deve avere per resto della divisione nuovamente il numero a, per poter riavere periodicamente le cifre 8 e 3. Essendo arrestata la divisione ai centesimi, il resto rappresenta centesimi, quindi $a = b \times 0{,}83 + \frac{a}{100}$, sicché moltiplicando per 100 si ha

$$a \cdot 100 = b \cdot 83 + a\ .$$

Sottraendo da ambo i membri di questa eguaglianza il numero a, si ha

$$a \cdot 99 = b \cdot 83\ ,$$

da cui si deduce che

$$\frac{a}{b} = \frac{83}{99}\ .$$

Viceversa, se $\frac{a}{b} = \frac{83}{99}$ si ha $a \cdot 99 = b \cdot 83$, e poi $a \cdot 100 = b \cdot 83 + a$; e poiché $a<b$, l'ultima eguaglianza dice che dividendo $a \cdot 100$ per b si ha 83 per parte intera del quoziente ed il numero a per resto (cfr. anche **41**). Dunque:

La frazione $\frac{83}{99}$, *o qualunque altra frazione ad essa equivalente, è la generatrice di* 0,(83).

Scolio Se si applicasse la medesima dimostrazione alla frazione decimale periodica 0,(9), si avrebbe per risultato non una frazione ordinaria propria, ma l'unità e ciò conferma che il detto numero periodico non ha generatrice.

33. *La generatrice di un numero decimale periodico semplice, con parte intera diversa da zero, è eguale ad una frazione ordinaria, che ha per numeratore la differenza fra il numero espresso dalla parte intera seguita da un periodo e il numero intero espresso dalla parte intera soltanto, e per denominatore il numero espresso da tanti nove quante sono le cifre del periodo.*

Dico che il numero 8,(571) ha per generatrice $\frac{8571-8}{999}$.

Infatti. $8,(571)=8+0,(571)=8+\frac{571}{999}$

e riducendo intero e fratto ad un sol fratto, si ha

$$8,(571)=\frac{8\times 999+571}{999}=\frac{8(1000-1)+571}{999}$$

$$=\frac{8000-8+571}{999}=\frac{8571-8}{999}.$$

Scolio. *Il denominatore di una frazione irreducibile generatrice di un numero periodico semplice non è divisibile per 2, nè per 5.*

34. *La generatrice di un numero decimale periodico misto, con parte intera diversa da zero o non, è eguale ad una frazione ordinaria, che ha per numeratore la differenza il cui sottraendo è il numero espresso dalla parte intera seguita dall'antiperiodo e da un periodo, e il sottrattore è il numero espresso dalla parte intera seguita dall'antiperiodo, e per denominatore il numero espresso da tanti nove quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre decimali non periodiche.*

Dico che il numero decimale periodico misto 13,8(51) ha per generatrice $\frac{13851-138}{990}$.

Infatti, moltiplicando e dividendo il numero dato per la potenza di 10 che ha l'esponente eguale al numero delle cifre antiperiodiche, si ha

$$13,8(51)=\frac{13,8(51)\times 10}{10}$$

e ricordando il n. **64**, 3°, del Cap. X dell'*Aritm. ed Alg.*, che si applica egualmente a qualunque numero decimale di infinite cifre, il numero precedente

$$= 138,(51) : 10 = \frac{13851 - 138}{99} : 10 = \frac{13851 - 138}{990}.$$

In pratica, dopo ottenuta la generatrice di un numero decimale periodico, bisogna, se è possibile, ridurla a minimi termini.

35. *Un numero decimale di infinite cifre, se non è periodico, è certamente un numero irrazionale.*

Infatti, se non fosse un numero irrazionale, dovrebbe essere o intero o razionale. Intero non può essere, perchè deve essere un numero compreso fra la parte intera del numero dato e l'intero immediatamente superiore. Razionale nemmanco; perché questo, trasformato in decimale, non può dare che un numero decimale finito o periodico. Dunque il numero suddetto è necessariamente irrazionale.

36. a) *Il numeratore della generatrice di un numero decimale periodico misto non può terminare per zero*; perché, se ciò potesse avvenire, bisognerebbe che l'ultima cifra dell'antiperiodo fosse eguale all'ultima cifra del periodo, ed allora il periodo comincerebbe un posto prima di quello ritenuto. Da ciò si deduce che:

b) *Il numeratore della generatrice di un numero decimale periodico misto non può contenere contemporaneamente i due fattori primi* 2 *e* 5. E siccome il denominatore contiene i fattori 2 e 5 con esponenti eguali al numero delle cifre dell'antiperiodo, ne risulta che nel ridurre la detta generatrice a minimi termini (se già non lo è) il denominatore conserverà uno almeno dei fattori 2 e 5 con esponente eguale al numero delle cifre non periodiche. E quindi:

c) *Il denominatore di una frazione ordinaria irreducibile generatrice di un numero decimale periodico misto è divisibile almeno per l'una o per l'altra delle potenze*

dei fattori 2 e 5 con esponente eguale al numero delle cifre dell'antiperiodo.

37. Tenendo presente che le *frazioni ordinarie irreducibili i cui denominatori non contengono fattori primi diversi da 2 e da 5 sono trasformabili in frazioni decimali finite* *) ed i teoremi dimostrati nei n. **32, 33, 34** di questo capitolo, possiamo decidere subito, dall'esame dei fattori primi del denominatore di una frazione irreducibile, quale frazione decimale risulterà dalla sua trasformazione in decimale; e ciò mediante i seguenti altri due teoremi:

1.° *Affinchè una frazione ordinaria irreducibile trasformata in decimale produca una frazione periodica semplice, è necessario e sufficiente che il suo denominatore non sia divisibile per 2, nè per 5.*

Infatti, questa condizione è necessaria per lo Scolio del n. **33**, ed è sufficiente, perché, suppostola soddisfatta, la frazione decimale che risulterà non può essere finita né periodica mista (**36**, **c**) **).

2.° *Affinchè una frazione ordinaria irreducibile trasformata in decimale produca una frazione decimale periodica mista, è necessario e sufficiente che il suo denominatore contenga almeno uno dei fattori 2 e 5, insieme ad altri fattori primi.*

Infatti, queste condizioni sono necessarie per i teoremi **34** e **36**, **b**; e sono anche sufficienti, perché, suppostole soddisfatte, la frazione decimale che risulta non può essere finita, né può essere periodica semplice (teorema precedente).

---

*) *Aritm. ed Alg.* Cap. IV, **54 e**.

**) Il periodo della frazione decimale periodica che risulta avrà tante cifre decimali per quante ne contiene il più piccolo multiplo del denominatore formato tutto di cifre 9. Così, p. es., notando che

$$9 = 3^2\ ,$$
$$99 = 3^2 \,.\, 11\ ,$$
$$999 = 3^3 \,.\, 37\ ,$$
$$9999 = 3^2 \,.\, 11 \,.\, 101\ ,$$

è facile riconoscere quali sono le frazioni irreducibili generatrici di frazion decimali periodiche semplici con periodi di 1, 2, 3, 4 cifre decimali.

Scolio. La frazione decimale periodica mista che risulta avrà tante cifre non periodiche quante sono le unità del maggiore degli esponenti dei fattori 2 e 5 contenuti nel denominatore.

38. Applicazione alle potenze.

a) *Se* $a > 1$, *è* $\lim\limits_{n=\infty} a^n = \infty$.

Infatti, si è dimostrato in *Arim. ed Alg.* (Cap. X, **100**, teor. 3° e 4°) che la potenza a^n, per $a > 1$ ed n crescente può divenire maggiore di qualunque numero N; quindi il limite della potenza suddetta per $n = \infty$ è ∞.

b) *Se* $a < 1$ *e positivo*, *è* $\lim\limits_{n=\infty} a^n = 0$.

Infatti, ivi si è pure dimostrato che la potenza a^n, per a positivo < 1 ed n crescente, può divenire minore di qualunque numero positivo ε; quindi il limite della potenza suddetta, per $n = \infty$, è zero.

c) *Se* a *è positivo, ed* n *tende a zero, è* $\lim a^n = 1$.

Infatti, si è dimostrato ivi stesso che per a positivo diverso da 1 la differenza fra a^n e l'unità può divenire minore di qualunque numero positivo ε; quindi il limite della potenza suddetta, per $n = 0$, è 1.

39. Dallo scolio del n. **77** del Cap. III dell'*Aritm. ed Alg.* è noto che

$$(k+1)a^k < (a+1)^{k+1} - a^{k+1} < (k+1)(a+1)^k$$

e, se si suppone nella prima diseguaglianza $a = 1, 2, 3, \ldots, n$, e nella seconda diseguaglianza $a = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, si ha rispettivamente

$$\begin{array}{l|l}
(k+1)\,1^k < 2^{k+1} - 1^{k+1} & 1^{k+1} - 0^{k+1} < (k+1)\,1^k \\
(k+1)\,2^k < 3^{k+1} - 2^{k+1} & 2^{k+1} - 1^{k+1} < (k+1)\,2^k \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
(k+1)\,n^k < (n+1)^{k+1} - n^{k+1} & n^{k+1} - (n-1)^{k+1} < (k+1)\,n^k
\end{array}$$

e sommando si ha separatamente

$$(k+1)(1^k + 2^k + \ldots + n^k) < (n+1)^{k+1} - 1\,,$$
$$n^{k+1} < (k+1)(1^k + 2^k + \ldots + k^k)$$

e quindi

$$n^{k+1} < (k+1)(1^k + 2^k + \dots + n^k) < (n+1)^{k+1} - 1 ,$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} < \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} - \frac{1}{n^{k+1}} \right\} : (k+1)$$

e passando al limite, per n crescente all'infinito,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$ (Teor. di Cavalieri) *).

In particolare:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{n=\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3} ,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}{n^4} = \frac{1}{4} .$$

40. Applicazione alle progressioni e serie geometriche. **a**) *In ogni progressione geometrica crescente si può trovare, prolungandola sufficientemente, un termine maggiore di qualsiasi numero.*

Infatti, dalla formola

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

si ha

$$\lim_{n=\infty} a_n = a_1 \lim_{n=\infty} q^{n-1} ,$$

e, siccome $q > 1$, si ha (**38, a**)

$$\lim_{n=\infty} a_n = \infty .$$

b) *In ogni progressione geometrica decrescente, prolun-*

---

*) Bonaventura Cavalieri da Milano (1598; 1647) dimostrò questo teorema, che fu la base del calcolo integrale, nella quarta delle sue *Exercitationes geometricae sex* (1647). John Wallis (1616; 1703) estese questa formola anche al caso di k reale (cfr. per la dimostrazione Cesàro, *Calc. infin.^le* p. 115).

gandola sufficientemente, si può trovare un termine minore di qualsiasi numero positivo.

Infatti, dalla formola

$$a_n = a_1 q^{n-1} ,$$

essendo $q < 1$, si ha (**38, b**)

$$\lim_{n=\infty} a_n = a_1 \lim_{n=\infty} q^{n-1} = 0 .$$

41. *La somma di* n *termini consecutivi di una progressione geometrica decrescente, per* n *crescente all'infinito, ha per limite una frazione che ha per numeratore il primo termine e per denominatore la differenza fra l'unità e la ragione.*

Sia a_1 il primo termine della progressione geometrica decrescente e q la ragione di modulo < 1; dall'*Aritm. ed Alg.* (XVII, **39**) già sappiamo che

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q} .$$

Prendendo il limite di ambo i membri di questa eguaglianza si ha $\lim_{n=\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \lim_{n=\infty} (1 - q^n)$;

ma essendo il modulo di $q < 1$, $\lim_{n=\infty} q^n = 0$,

quindi $$\lim_{n=\infty} S^n = \frac{a_1}{1 - q} .$$

La somma dei termini di una progressione geometrica illimitata dicesi *serie geometrica*; se questa somma ha un limite, questo si assume come *valore* della serie.

Così, per es., la somma degli infiniti termini della progressione

$$\div\!\div\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots,$$

cioè $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

Analogamente, il limite a cui tende la somma dei termini consecutivi della progressione

$$\div 3\,,\ -1\,,\ +\frac{1}{3}\,,\ -\frac{1}{9}\,,\ +\frac{1}{27}\,,\ \dots$$

è
$$\lim_{n=\infty} S_n=\frac{3}{1+\frac{1}{3}}=\frac{9}{4}\,.$$

Allo stesso risultato si perverrebbe facendo la differenza fra la somma dei termini positivi e quella dei termini negativi.

Si può applicare questo teorema a ritrovare con metodo diverso la generatrice di una frazione decimale periodica semplice. La frazione decimale periodica semplice 0,(23) si può scrivere

$$\frac{23}{100}+\frac{23}{100^2}+\frac{23}{100^3}+\dots,$$

e perciò risulta essere la somma dei termini di una progressione geometrica decrescente di cui il primo termine è $\frac{23}{100}$ e la ragione è $\frac{1}{100}$; quindi

$$\lim_{n=\infty} S_n=\frac{23}{100}:\left(1-\frac{1}{100}\right)=\frac{23}{100}:\frac{99}{100}=\frac{23}{99}\,.$$

42. Dall'essere, per una progressione geometrica decrescente,
$$\lim S_n=\frac{a_1}{1-q}\,,$$
si dice che la *somma dei termini di una progressione geometrica decrescente è una serie geometrica convergente.*

Invece, per una progressione geometrica crescente, si ha

$$\lim S_n=\frac{q\lim a_n}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}=\infty$$

e quindi la somma dei suoi termini è una *serie geometrica divergente.*

Per una progressione geometrica di ragione $q = 1$ si ha

$$\lim S_n = \lim n a_1 = \infty \quad ,$$

e quindi la somma dei suoi termini è una *serie geometrica divergente.*

Le progressioni geometriche che hanno la ragione negativa, se hanno la ragione > -1, costituiscono *serie convergenti*;
se hanno la ragione $= -1$, costituiscono *serie indeterminate*;
se hanno la ragione < -1, costituiscono *serie inderminate*, ma divergenti in valore assoluto.

Dalla divisione di 1 per $1 - x$ si ha

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} ,$$

da cui $$\frac{1}{1-x} - (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

e quindi per $x < 1$

$$\lim_{n=\infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) = \frac{1}{1-x}$$

e quindi risulta che la serie geometrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

è convergente soltanto quando x è minore di 1.

Esercizi.

1. Trovare il limite della variabile $a + \frac{b(-1)^n}{n}$ per n crescente all'infinito.

2. Dimostrare che, se x è variabile decrescente che tende al limite a, il limite di $\frac{b^2}{(x-a)^{2n+1}}$ è $+\infty$, o $-\infty$ secondo che x prende valori sempre positivi, o sempre negativi.

3-5. Dimostrare che:

$$\lim_{b=\infty} \frac{ab}{a+b} = a \quad ; \quad \lim_{x=\infty} \frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2} = \frac{c}{c'} \quad ; \quad \lim_{x=\infty} \frac{a+bx+cx^2+dx^3}{a'+b'x+c'x^2+d'x^2} = \frac{d}{d'} .$$

6. Dimostrare che, se il numero x_n ha per limite x e se a, b, c, d sono costanti, $\lim \frac{ax_n+b}{cx_n+d} = \frac{ax+b}{cx+d}$.

7. Dimostrare che $\lim_{x=\infty} \frac{ax^n+b}{cx^n+d}$ è $\frac{a}{c}$ o $\frac{b}{d}$ secondo che x è maggiore o minore di 1.

8. Dimostrare che il limite verso cui tende la somma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}, \text{ per } n=\infty, \text{ è } 1 .$$

9. Dimostrare che se nella successione $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ è α il limite di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, si ha $\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = \alpha^2$.

10. Dimostrare che il limite della somma

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \text{ per } n=\infty, \text{ è } \frac{1}{2} .$$

[Si noti che $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1}$, oppure $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$].

11. Dimostrare che il limite della somma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n(n+1)}, \text{ per } n=\infty, \text{ è } 1 .$$

(Si noti che $\frac{n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n(n+1)}$).

12. Si consideri la successione illimitata $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$ di numeri tali che ognuno sia compreso fra i due precedenti, e si dimostri che le due successioni $a_1, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, b_3, \dots$ hanno ciascuno un limite, e che, se esse hanno lo stesso limite anche la successione data ha un limite che è eguale al precedente.

13. Dimostrare che il limite della somma

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3.4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \text{ per } n=\infty, \text{ è } \frac{1}{4} .$$

[Si noti che $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$].

14. Dimostrare che $\lim_{x=1} \frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}} = \frac{16}{9}$.

Si ponga $\sqrt[12]{x}=z$, o si moltiplichino prima ambo i termini per $\sqrt{2z^4-z^{10}}+1$ e poi si dividano per $z-1$).

15. Dimostrare *a priori* che è indifferente assumere come generatrice della frazione periodica 0,(261), una qualunque delle frazioni

$$\frac{261}{999}\,,\ \frac{261261}{999999}\,,\ \text{ecc.}$$

16. Dimostrare *a priori*, che è indifferente assumere come generatrice della frazione periodica 0,87(261) una qualunque delle frazioni

$$\frac{87261-87}{99900}\,,\ \frac{872612-872}{999000}\ .\ \text{ecc.}$$

17-28. Convertire in frazioni ordinarie irreducibili le seguenti frazioni decimali periodiche

0,(36) ; 0,(135) ; 1,(72) ; 0,0(51) ; 0,3(148) ; 0,11(36) ; 5,18(7) ; 0,4(65) ; 0,0087(93) ; 11,2(87) ;

0,808571(142857) ; R. $\frac{283}{359}$; 0,(012345679) ; R. $\frac{1}{81}$.

29-35. Trovare il limite delle somme seguenti :

$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots$, R. $1+\frac{1}{9}$;

$1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots$, R. $1+\frac{1}{99}$;

$\frac{63}{100}+\frac{63}{100^2}+\frac{63}{100^3}+\cdots$, R. $\frac{7}{11}$;

$\frac{8}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots$, R. $\frac{5}{6}$;

0;(012345679) + 0,0(012345679) + 0,00(012345689) + ... , R. $\frac{10}{729}$;

$1-\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}-\cdots$, R. $\frac{10}{11}$;

0,(63) — 0,0(63) + 0,00(63) — 0,000(63) + ... , R. $\frac{70}{121}$;

36-39. Trovare il limite dei valori di ciascuna delle seguenti espressioni:

$$\{\,0,(36) : 1,78\,\}\times 5,9(3) : 8,072\quad ;\quad \left(\frac{2,375}{6,(3)}\times\frac{8,(8)}{0,0625}\right) : \left(\frac{17,(7)}{11,35}\times\frac{4}{7}\right)\ ;$$

$$\left(\frac{3,(5)-1,8(3)}{4,(1)+5,(8)}\times\frac{7,25\times 1,2}{3.25}\right)+\frac{3,1\times 0,1(01)}{2,(15)}\ ;$$

$$\frac{\frac{3}{2}\times 3,2(81)+\frac{1}{3}\times 2,2(81)}{\frac{13}{6}\times 4,2(81)-\frac{1}{3}\times 3,2(81)-2\ \text{e}\ \frac{1}{2}}+\frac{3}{6,(45)}-\frac{2\times 5,(45)-1}{5,(45)^2+\frac{1}{2}\times 4,(45)}\ .\quad \text{R. } 1\,\frac{11}{17}\,.$$

40. Dimostrare che un numero non divisibile per 2, nè per 5, è sempre divisore di un numero formato di cifre tutte eguali a 9.

41-44. Senza sviluppare in decimali le frazioni $\frac{8}{11}, \frac{7}{13}, \frac{23}{27}, \frac{34}{37}$, determinare i periodi delle frazioni decimali da esse generate.

45. Trovare i denominatori delle frazioni ordinarie irreducibili che sono generatrici di frazioni periodiche semplici con periodi di 1, 2, 3, 4, 5 cifre.

R. 3,9 ; 11,33,99 ; 27,37.111,333,999 ; 101,303,909,1111,3333,9999; ...

46-49. Trovare i denominatori delle frazioni ordinarie irreducibili che sono generatrici di frazioni decimali periodiche miste aventi: 1.° una cifra non periodica ed 1 periodica; 2.° due cifre non periodiche ed 1 periodica; 3° una cifra non periodica o 2 periodiche; 4.° due cifre non periodiche e 2 periodiche; ecc. ecc.

R. 1° $2 \cdot 3$, $2 \cdot 9$, $5 \cdot 3$, $5 \cdot 9$, $2 \cdot 5 \cdot 3$, $2 \cdot 5 \cdot 9$; ecc.

50. Dimostrare che ogni numero intero n è divisore di un numero espresso da una successione di cifre 9 seguìte da diversi zeri.

51. Se il denominatore b di una frazione irreducibile a/b è primo con 2, 3, 5, questa frazione è generatrice di una frazione decimale periodica semplice di cui il periodo è divisibile per 9.

52. Dimostrare che, se n è intero, la somma delle frazioni $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}$ è generatrice di una frazione decimale periodica mista.

53. Il prodotto di due frazioni decimali periodiche semplici proprie, è una frazione decimale periodica semplice.

54. Se due frazioni irreducibili hanno il medesimo denominatore e si riducono entrambi in decimali, i periodi delle frazioni ottenute avranno lo stesso numero di cifre. (Si considerino le frazioni $1/b$ e a/b e si esaminino separatamente i casi in cui b è primo con 10 o non).

55. Se una frazione ordinaria $\frac{m}{p}$ è generatrice di una frazione decimale periodica con $p-1$ cifre nel periodo, disponendo queste cifre in cerchio ad egual distanza la figura ottenuta dalle cifre sarà indipendente dal numeratore m.

56. Se a/b è una frazione irreducibile generatrice di una frazione decimale periodica semplice con p cifre decimale, la somma dei periodi delle due frazioni decimali periodiche generate da $\frac{a}{b}$ e $\frac{b-a}{a}$ è eguale a $10^p - 1$.

Determinare il valore delle seguenti serie geometriche:

57. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

58. $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} - \ldots$

59. $\frac{1}{8} + \frac{3}{8^2} + \frac{7}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \frac{3}{8^5} + \frac{7}{8^6} + \frac{1}{8^7} + \ldots$

60. $\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{a}{n^3} + \frac{b}{n^4} + \ldots$ R. $\frac{an+b}{n^2-1}$;

61. $\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+\frac{a}{n^5}+\frac{b}{n^6}+\dots$ R. $\frac{an^3+bn^2+cn+d}{n^4-1}$.

62. Trovare il limite della somma delle frazioni

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\dots,$$

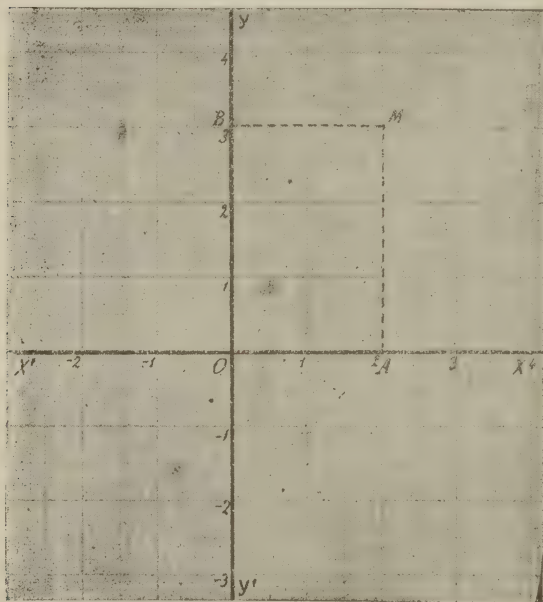
di cui i numeratori formano una progressione aritmetica ed i denominatori una progressione geometrica.

(Si decomponga la serie in infinite progressioni geometriche decrescenti e si trova che il limite è 2).

CAPITOLO SESTO.

DIAGRAMMI E LORO APPLICAZIONI.

§ 1. — Coordinate cartesiane ortogonali nel piano. Diagrammi.

1. COORDINATE CARTESIANE ORTOGONALI NEL PIANO. La rappresentazione che abbiamo mostrata al n. 9 del Cap. II dell'*Aritm. ed Alg.* per i *diagrammi* delle funzioni porta il nome di rappresentazione in *coordinate cartesiane ortogonali* *) dal nome del matematico che mise in luce il vantaggio che questa arreca alla scienza matematica. Le due rette XX′, YY′ perpendicolari fra loro si chiamano *assi delle coordinate* e più precisamente XX′ si dice *asse delle ascisse*, YY′ si dice *asse delle ordinate*. Qualora i due segmenti unità si prendano eguali fra loro, la carta quadrettata millimetrica può servire util-

*) Il gran vantaggio che si ottiene dalla rappresentazione dei punti mediante le coordinate fu da Réné Descartes (detto italianamente Cartesio) (nato a La Haye, 1596; 1650) fatto conoscere con la sua *Géométrie* pubblicata da lui come quarto libro dei *Principii di filosofia* nel 1637.

mente allo scopo per trovare i punti delle funzioni corrispondenti ai diversi valori della variabile.

Le distanze BM, AM di un punto M da XX′, YY′ sono le coordinate del punto M. La BM = OA è l'*ascissa*, la AM = OB è l'*ordinata*; esse sono date dalle distanze di A e B da O e quindi dalle coordinate di questi punti nelle corrispondenti scale.

Dato un punto M sono quindi determinate le sue coordinate mediante due numeri, e se le coordinate di M sono 2 e 3 il punto M si dice di coordinate 2, 3, o punto (2, 3), scrivendo prima l'ascissa poi l'ordinata.

Viceversa, date le coordinate di A e B, è determinato il punto M dall'incontro delle perpendicolari elevate da A e B ai rispettivi assi. Le coordinate dei punti dell'angolo XOY (1° ang.) sono entrambe positive; delle coordinate dei punti dell'angolo YOX′ (2° ang.) l'ascissa è negativa e l'ordinata è positiva; le coordinate dei punti dell'angolo Y′OX′ (3° ang.) sono entrambe negative; e delle coordinate dei punti dell'angolo Y′OX (4° ang.) l'ascissa è positiva e l'ordinata negativa.

La costruzione qui indicata per trovare il punto M di coordinate 2 e 3 coincide con quella indicata nel n. **9** suddetto per trovare i punti del diagramma.

In particolare i punti di ascissa zero sono tutti i punti dell'asse YY′, i punti di ordinata zero sono i punti dell'asse XX′, il punto (0, 0) è l'origine O *).

Per abitudine l'ascissa di un punto si indica con x e l'ordinata con y.

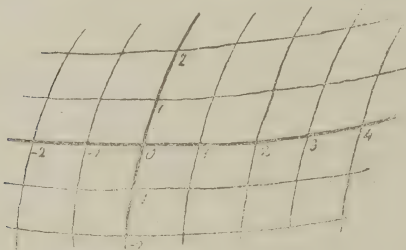
---

*) È bene però avvertire che gli assi di coordinate possono avere un'inclinazione qualsiasi e non già essere assolutamente ortogonali. Come pure si deve avvertire che si può generalizzare la nozione di coordinate nel piano, o su di una superficie, immaginando su questa una serie di curve tali che due consecutive restino vicine senza incontrarsi, e distribuite in modo che si possano attribuire ad esse a partire da una qualunque in un senso i numeri 0, 1, 2, 3, ... e nell'altro —1, —2, —3, ... Questi numeri si pos-

2. Rappresentazione grafica di un fenomeno che dipende da una sola variabile. Esempi di diagrammi. Allorquando si è parlato delle funzioni (*Aritm. ed Alg.* II) si sono dati degli esempii di funzioni per le quali la relazione fra la variabile e la funzione non è esprimibile mediante operazioni aritmetiche, come a dire, il prezzo del grano sul mercato, la variazione di temperatura di un ammalato febbrile. Queste relazioni si possono rendere visibili a colpo d'occhio con l'uso delle coordinate, mediante i *diagrammi*.

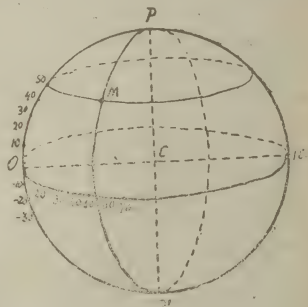
Prendiamo ad esempio la variazione della febbre di un

---

sono considerare come ascisse di tutti i punti della curva cui il numero appartiene. E quindi se si stabilisce sulla superficie un'altra serie di curve vicine l'una all'altra, ciascuna delle quali incontri una volta ed una sola ogni curva della prima serie e si numerano queste curve come quelle della prima serie; si verrà a formare una rete in cui ogni nodo essendo intersezione di due curve è individuato dai numeri delle curve che ci passano.

Queste si dicono *coordinate curvilinee.*

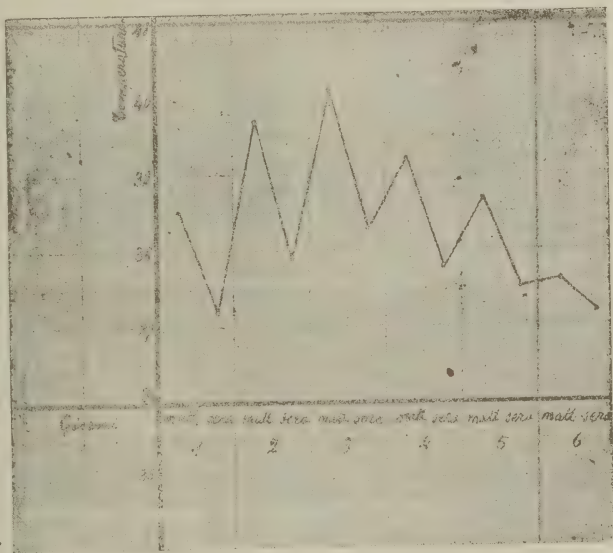
Inserendo fra le curve di ogni serie altre curve, numerate da numeri razionali ordinatamente, si perverrebbe a stabilire la posizione di ogni punto della superficie con due soli numeri, come si è fatto per le coordinate cartesiane.

Non altrimenti si fa per determinare i punti della superficie di una sfera mediante le *coordinate geografiche*. La prima serie di curve è rappresentata dai meridiani, la seconda serie di curve dai paralleli; il meridiano principale è quello che si dice lo *zero* dei meridiani, e l'equatore è lo *zero* dei paralleli, con la sola differenza che sul meridiano si fissano i gradi da 0 a 90 e da 0 a —90 dall'equatore ai due poli e questi numeri segnano la *latitudine*, e sull'equatore si fissano i gradi da 0 a 180 e da 0 a —180 per i due emisferi orientale ed occidentale e questi numeri costituiscono la *longitudine*. È da avvertire che a ciascuno dei due poli non compete alcuna longitudine, perchè in essi tutti i meridiani concorrono.

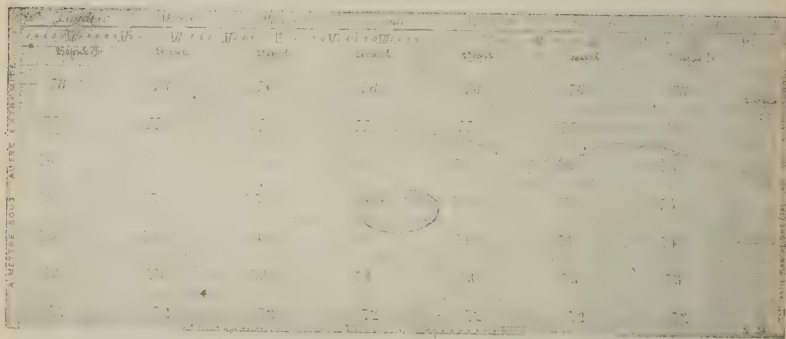
La posizione di ogni punto M della superficie sferica è assegnata dal numero che spetta al meridiano che passa pel luogo (*longitudine*) e dal numero che spetta al parallelo che passa pel luogo (*latitudine*).

ammalato, la variabile è il tempo espresso in giorni, in ore, o in periodi equidistanti (p. es. mattina e sera), la funzione è la temperatura segnata dal termometro. Sull'asse delle ascisse si rappresenteranno i giorni con le suddivisioni adottate, sull'asse delle ordinate i gradi del termometro. Supponiamo che di un ammalato si siano prese le seguenti osservazioni :

1°	giorno,	mattina	38.5	sera	37.2
2°	»	»	39.7	»	37.9
3°	»	»	40.1	»	38.3
4°	»	»	39.2	»	37.8
5°	»	»	38.7	»	37.5
6°	»	»	37.6	»	37.2 ,

segnando ogni osservazione mediante le sue coordinate si avranno i punti che si vedono indicati nella figura seguente.

È evidente che se il termometro si fosse applicato all'ammalato nelle ore intermedie si sarebbero avuti altri punti intermedii e se si applicasse il termometro in continuazione o si osservasse la temperatura a intervalli piccolissimi di tempo, i punti sarebbero così vicini l'uno all'altro che formerebbero quasi una linea sola, che darebbe l'idea a colpo d'occhio della variazione effettiva fatta dalla febbre.

Nonpertanto anche le due osservazioni giornaliere, qualora si congiungano le osservazioni consecutive con tratti rettilinei bastano a dare al medico la cognizione dell'andamento della febbre dell'ammalato, il suo crescere il suo diminuire, ed a caratterizzare il tipo della febbre.

Questo che quì sopra abbiamo disegnato è il diagramma di un tipo di febbre di tifo addominale.

Per le osservazioni barometriche degli osservatorii meteorologici, si ricorre a speciali barometri che fanno muovere una punta di lapis che segna il grado della pressione sopra una carta che si arrotola intorno ad un cilindro verticale che compie con movimento automatico un giro in una settimana. In tal caso l'apparecchio registra la pressione atmosferica di ogni istante, e perciò basta dare uno sguardo alla carta su cui il lapis ha tracciato la curva per avere la cognizione esatta della variazione della pressione atmosferica in quel luogo. La figura seguente mostra una di queste carte.

In essa le ascisse sono rettilinee, e divengono delle circonferenze quando la carta è avvolta sul cilindro; le ordinate sono curvilinee, perché devono essere tracciate sul cilindro da una punta di un'asta che rota intorno ad un punto fisso in un piano verticale. Sulle ascisse si leggono i giorni e le ore di 2 in 2, sulle ordinate si legge la pressione atmosferica in centimetri colle suddivisioni in millimetri.

La linea tracciata dall'apparecchio registratore mostra

chiaramente qual'è stata ad ogni istante la pressione atmosferica nell'Università di Napoli dal 25 Aprile al 2 Maggio 1910.

Analoghe registrazioni si fanno per le variazioni di temperature, per gli stati igroscopici, per le pressioni del vapore delle caldaie delle macchine, ecc.

Diagrammi analoghi a questi si fanno per le statistiche dei prezzi delle derrate, per le nascite, per le morti degli abitanti di un paese, ecc.

§ 2. — Rappresentazione del binomio di 1° grado.

3. Funzioni lineari. Il binomio di 1° grado, detto altrimenti funzione lineare, è come sappiamo

$$y = ax + b ,$$

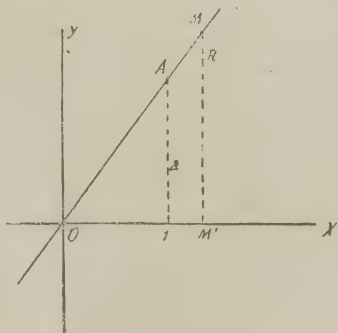
ci proponiamo qui di cercare qual'è il suo diagramma.

Cominceremo da un caso semplice, quello cioè in cui sia $b = 0$; cercheremo cioè la rappresentazione di

$$y = ax .$$

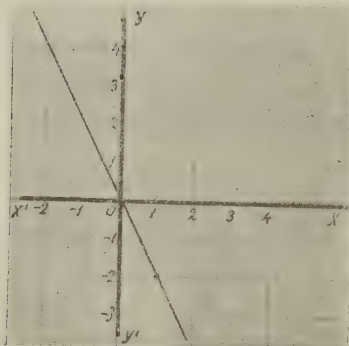
Se $x = 0$, anche $y = 0$, quindi il punto O fa parte del diagramma di questa funzione. Se $x = 1$, $y = a$ quindi il punto $A = (1, a)$ appartiene al diagramma; ora io dico che la retta OA è il diagramma della funzione. Infatti, se M è un punto di questa retta ed M′ il piede della ordinata sua, i due triangoli simili OMM′, OA1 dànno la proporzione

$$\frac{M'M}{OM'} = \frac{1A}{O1} = \frac{a}{1}$$

e quindi se indichiamo con y_0 l'ordinata M′M e con x_0 l'ascissa OM′, si ha $\dfrac{y_0}{x_0} = \dfrac{a}{1}$, e quindi $y_0 = ax_0$; dunque le coordinate di M soddisfano la funzione $y = ax$. La stessa osservazione vale per tutti i

punti della retta OA; quindi ogni punto di OA appartiene al diagramma della funzione $y = ax$. Per ogni altro punto R, non appartenente alla retta OA, il rapporto $\frac{M'R}{OM'} \mp \frac{a}{1}$, e quindi le coordinate di R non soddisfano la funzione $y = ax$.

Dunque il luogo geometrico della funzione y = ax *è la retta* OA e si dice che la funzione $y = ax$ è rappresentata dalla retta OA, ovvero che la retta OA è il diagramma della funzione $y = ax$.

Se il coefficiente a è positivo la retta OA attraversa gli angoli 1° e 3°, se a è negativo il punto A capita nel 4° angolo, e quindi la retta attraversa gli angoli 2° e 4°.

Per es. la funzione $y = 3x$ ha per diagramma quello rappresentato dalla figura qui affianco, cioè una retta che passa pel punto O e pel punto (1, 3); la funzione $y = -2x$ ha per diagramma quello rappresentato dalla seguente figura, cioè una retta che passa pel punto O e pel punto (1, — 2).

Il coefficiente a si dice *coefficiente angolare* della retta, perché esso essendo $= \frac{y}{x}$ rappresenta la tangente dell'angolo XOA, che la retta forma coll'asse dell'ascisse, il quale angolo è acuto se a è positivo, è ottuso se a è negativo.

Quando $a = 0$, il punto A coincide con 1, e la funzione, che si riduce ad $y = 0$, è rappresentata dalla retta X'X; quando a, restando positivo, aumenta, la retta OA rota intorno all'origine O nel senso XOY, ed a misura che il punto A si eleva la retta OA tende ad avvicinarsi ed a confondersi

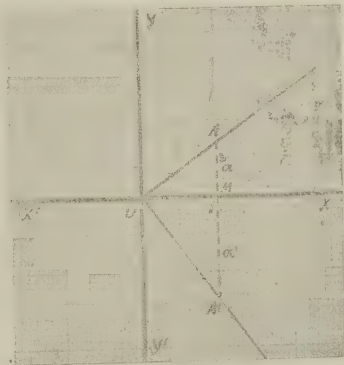
con l'asse OY della fig. a p. 197, sicché per a tendente al limite $+\infty$, la retta OA ha per posizione limite la retta OY.

Se a è negativo e si fa crescere il suo modulo indefinitamente, la retta OA roterà nel senso XOY' e tenderà a prendere la posizione OY', cioè la stessa che OY.

Dunque se a varia da $-\infty$ a $+\infty$ la retta OA roterà dalla posizione OY' passando per OX alla posizione OY.

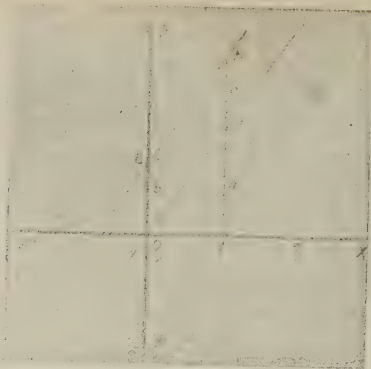
Ogni punto della retta OY ha per ascissa $x=0$, e viceversa, qualunque punto che soddisfa alla condizione suddetta, appartiene all'asse OY, dunque l'asse OY ha per equazione $x=0$. E questa equazione è appunto quella che si ottiene da $y=ax$ nell'ipotesi che a tende a divenire ∞, poichè dividendola per a si ha $\frac{y}{a}=x$, e per a tendente all'∞ si ha nel limite $0=x$.

Quando $a=1$ e le unità dell'ascisse e delle ordinate sono eguali, la retta prende la posizione della bisettrice dell'angolo XOY; e se invece $a=-1$, la retta prende la posizione della bisettrice dell'angolo XOY'.

Se due rette OA, OA', rappresentate da $y=ax$, $y=a'x$, sono fra loro perpendicolari, dal triangolo AOA', rettangolo in A, si deduce (tenendo conto del segno diverso) che $MA \times MA' = -OM^2$, cioè che $aa'=-1$. Dunque la condizione $aa'=-1$, ovvero $aa'+1=0$ rappresenta la condizione necessaria e sufficiente affinché le due rette OA, OA' siano perpendicolari fra loro

4. Esaminiamo ora la funzione lineare generale

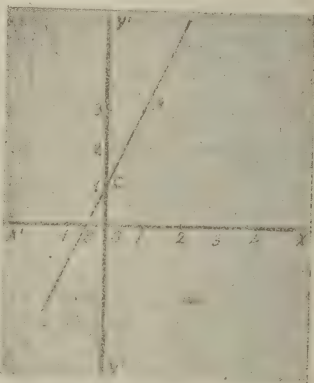
$$y=ax+b\ .$$

Paragonandola con la funzione $y_1=ax$, si vede subito che le funzioni y ed y_1 differiscono per una costante b, e

quindi, se tutte le ordinate della retta OA che rappresenta $y_1 = ax$ si aumentano della lunghezza $b = OC$, si hanno i punti della funzione $y = ax + b$. Si ottengono dunque i punti del diagramma di $y = ax + b$, facendo subire alla retta OA una traslazione equipollente ad OC, e perciò il diagramma è una retta parellela ad OA, che passa per il punto $C = (0, b)$; il segmento OC dicesi *ordinata* all'origine.

ESEMPII. 1.° *Rappresentare graficamente la funzione* $y = 2x + 1$.

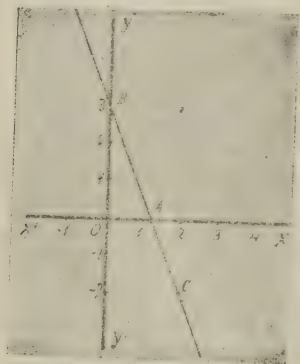
Per $x = 0$ si ha $y = 1$, e quindi il punto C.

Per $x = 1$ si ha $y = 3$, e quindi il punto A.

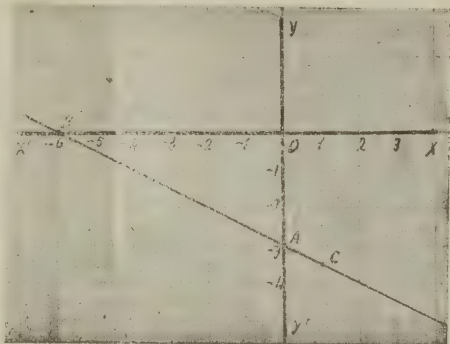
Dunque la funzione è rappresentata dalla retta CA. Essa incontra l'asse XX' nel punto B di ascissa $-\frac{1}{2}$, che si ottiene ponendo nell'equazione $y = 0$.

2.° *Rappresentare graficamente la funzione* $y = 3 - \frac{5}{2} x$.

Per $x = 0$ si ha $y = 3$, e quindi il punto B.

Per $x = 2$ si ha $y = -2$, e quindi il punto C.

Dunque la funzione è rappresentata dalla retta BC. Essa incontra l'asse XX' nel punto A di ascissa $\frac{6}{5}$, che si ottiene ponendo $y = 0$.

3.° *Rappresentare graficamente la funzione* $y = -\frac{1}{2}x - 3$.

Per $x = 0$ si ha $y = -3$, e quindi il punto A.
Per $x = 1$ si ha $y = -3\,^1/_2$, e quindi il punto C.

Dunque la funzione è rappresentata dalla retta AC. Essa incontra l'asse XX′ nel punto B di ascissa -6, che si ottiene per $y = 0$.

5. In generale, ogni equazione lineare del tipo $ax + by = c$ rappresenta una retta; poiché essa si può sempre scrivere sotto la forma
$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Ponendo $x = 0$ si ha $y = \frac{c}{b}$ e questa è la parte intercetta dalla retta sull'asse delle y, cioè l'*ordinata all'origine*; ponendo $y = 0$ si ha $x = \frac{c}{a}$, e questa è la parte intercetta dalla retta sull'asse delle x, cioè l'*ascissa all'origine*.

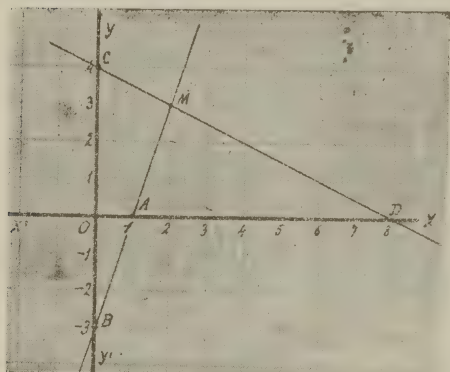
6. Risoluzione grafica delle equazioni lineari. La risoluzione dei sistemi di equazioni lineari numeriche a due incognite si può ottenere graficamente, in generale con una sufficiente approssimazione, servendosi della rappresentazione grafica delle equazioni.

Sia da risolvere il sistema delle equazioni

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Si è visto che ciascuna di queste equazioni è rappresentata da una retta, che si può facilmente costruire con la carta quadrettata. Le rette rappresentano i luoghi dei punti di cui le coordinate soddisfano le due equazioni; quindi il

punto comune alle rette rappresenta la soluzione comune alle due equazioni, e perciò basta tracciare le rette e trovare le coordinate del punto d'intersezione.

Esempio. Trovare la soluzione comune alle due equazioni

$$3x - y = 3$$
$$x + 2y = 8 \ .$$

La prima delle equazioni è rappresentata dalla retta AB che passa per i punti 1 e -3 degli assi; la seconda è rappresentata dalla retta CD, che passa per i punti 8 e 4 degli assi.

Le due rette si incontrano nel punto M, di cui le coordinate sono 2, 3; quindi la soluzione comune è $x = 2$, $y = 3$.

7. Se una retta di equazione

$$y = ax + b$$

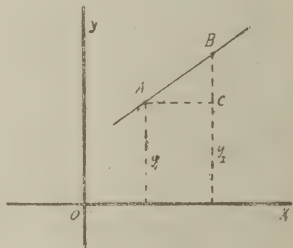
passa per i punti $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, devono verificarsi le due identità

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b \ ,$$

e quindi, sottraendo,

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$$

e perciò, supposto $x_1 \neq x_2$,

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_2} = \frac{\text{CB}}{\text{AC}} \ .$$

Da ciò si deduce che:

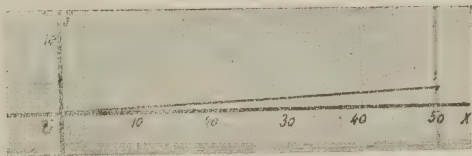
Il coefficiente angolare di una retta, non parallela, all'asse OY, *è eguale al rapporto della differenza delle ordinate di due suoi punti alla differenza delle ascisse degli stessi punti, prese nello stesso ordine.*

Nel caso che fosse $x_1=x_2$, i due punti A e B avrebbero la stessa ascissa e quindi la retta AB risulterebbe $\parallel$ all'asse OY; in tal caso ogni punto della retta ha per ascissa x_1 e l'equazione della retta è $x=x_1$, manca cioè della variabile y.

8. Applicazione alla topografia. Pendenza. Dicesi *pendenza* di una strada rettilinea il rapporto fra le quote di due suoi punti alla distanza orizzontale di questi punti. Se una strada rettilinea parte dalla quota di 50 metri e arriva alla distanza di 300 km. alla quota di 62 metri, la pendenza della strada è data da

$$\frac{62-50}{300}=\frac{12}{300}=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}\,.$$

Si dice che la pendenza della strada è $\frac{1}{25}$ o $\frac{4}{100}$ o il 4 %.

Se si prende per origine delle coordinate il punto O di origine della strada, per asse delle x la sua proiezione sul piano orizzontale e per asse delle y la verticale nel punto O: la sezione della strada sarà rappresentata come qui si vede nella figura, e la sua equazione è $y=\frac{1}{25}x$; e da ciò si deduce che la pendenza della strada coincide col coefficiente angolare del diagramma della sua sezione verticale.

9. Applicazione al moto uniforme. È noto che l'equazione del moto uniforme nella sua espressione più generale è

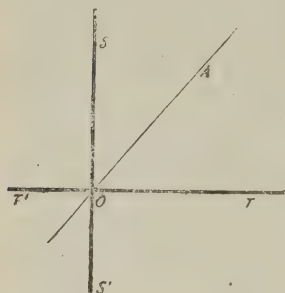
$$s=v(t-t_0)+s_0\,.$$

Tracciati i due assi di coordinate OT, OS, se rappresentiamo sull'asse delle ascisse il tempo, e sull'asse delle ordinate lo spazio, e prendiamo eguali i segmenti unità (con la quale convenzione possiamo far uso della carta millimetrica), l'equazione suddetta, che è pure lineare, ha per diagramma una retta.

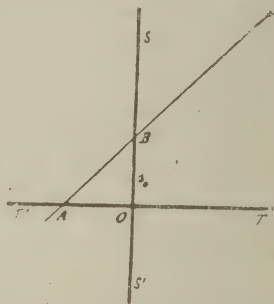
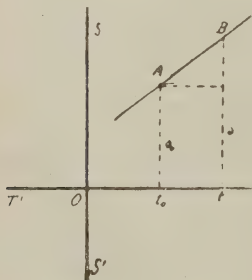
Dunque il moto uniforme è rappresentato da una retta.

Quando l'equazione del moto uniforme è

$$s = vt\ ,$$

cioè quando $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, l'origine del tempo del moto è O, e l'origine dello spazio è pure O; in tal caso il moto è rappresentato da una retta passante per O, di cui v è il coefficiente angolare. Cosicché la *velocità* v del moto uniforme rappresenta la tangente dell'angolo che la retta fa con l'asse delle ascisse, e quindi quest'angolo aumenta col crescere della velocità. Un moto più veloce di un altro è rappresentato da una retta che fa coll'asse OT un angolo maggiore.

La quiete è rappresentata da una retta che forma angolo zero coll'asse OT, cioè ∥ ad OT.

Quando l'equazione del moto uniforme è $\quad s = vt + s_0$

cioè quando $t_0 = 0$ ed $s_0 \neq 0$, $s_0 = OB$ rappresenta lo spazio all'origine del tempo, e la retta che rappresenta questo moto passa pel punto B.

Nel caso generale in cui anche $t_0 \neq 0$, nel qual caso al tempo t_0 il mobile si trova alla distanza s_0 dall'origine, la retta che rappresenta il moto $s = v(t - t_0) + s_0$ deve passare per il punto $A = (t_0, s_0)$ e se B è il punto determinato dal moto al tempo t, la retta AB rappresenta il moto. Dalla equazione suddetta si ricava

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0}\ .$$

Siccome $t - t_0$ è l'intervallo di tempo fra gli istanti t_0 e t, ed $s - s_0$ è lo spazio percorso in questo intervallo, si può conchiudere che:

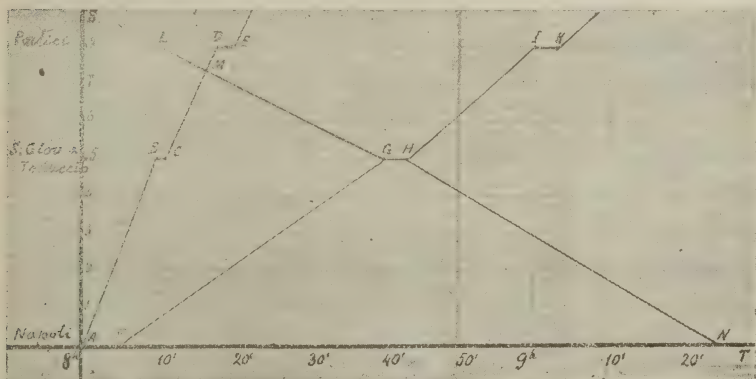
La velocità del moto uniforme è eguale al quoziente della misura dello spazio percorso durante un certo intervallo di tempo diviso per la misura di questo intervallo di tempo.

10. Diagrammi delle strade ferrate. La rappesentazione grafica del moto uniforme è utilizzata dalle compagnie ferroviarie, per dare agli impiegati sotto una forma comoda e chiara il quadro delle corse dei treni sopra un percorso determinato.

Per semplificazione si ammette che fra due stazioni consecutive il moto del treno sia uniforme; nelle fermate lo spazio non muta mentre il tempo aumenta della durata della fermata.

Cosicchè la corsa fra le due stazioni è rappresentata da una retta inclinata all'asse del tempo, e la fermata da un tratto parallelo all'asse del tempo.

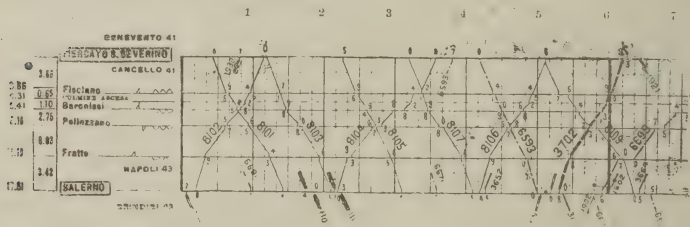
Supponiamo per es. che nel quadro si rappresenti il minuto con 1 mm e il km pure con 1 mm, la velocità riferita al km ed al minuto sarà rappresentata dalla tangente dell'angolo che la retta che rappresenta il moto del treno farà con l'asse del tempo.

Nella figura seguente rappresentiamo le corse di tre treni

sulla linea Napoli-Portici: uno di viaggiatori e due di merci. La corsa del treno viaggiatore e espressa dalla linea ABCDE; esso parte da Napoli alle ore 8, percorre 5 km in 10', sosta

1′ a S. Giovanni a Teduccio, percorre altri 3 km in 7′, e ferma nella detta stazione per proseguire dopo 2′ di fermata.

La corsa del treno merci da Napoli a Portici è rappresentata dalla linea FGHIK; esso parte da Napoli alle ore 8 e 5′, percorre 5 km in 35′, sosta 3′ a S. Giovanni a Teduccio, impiega altri 17′ per giungere a Portici, ove sosta altri 3′ per proseguire poi. La linea LMGHN rappresenta la corsa di un treno merci che da Portici va a Napoli. Esso parte da Portici alle ore 8 e 10′, impiega 30′ da Portici a S. Giovanni, ivi si ferma 3′ e poi procede per Napoli ove arriva dopo 42′ alle ore 9 e 25′.

La linea LG interseca la linea CD in M, e quella intersezione indica che il treno viaggiatore di andata e quello merci di ritorno si incontreranno fra S. Giovanni e Portici alle ore 8 16′ alla distanza di 600 m da Portici.

La figura seguente rappresenta un quadro di corse vere di treni fra Salerno e Mercato S. Severino tra le ore 0 e 7; ogni ora è divisa in 6 striscie di 10′ ciascuna, e per dare all'impiegato una precisione maggiore di quello che potrebbe presentare il disegno, ogni tratto della corsa è fornito di due piccoli numeri che indicano i secondi che occorre

aggiungere alla striscia precedente. Così, per esempio, il treno 8103 parte da Mercato S. Severino a 1^h e 10′, giunge a Fisciano 1^h e 21′, riparte a 22′, giunge a Baronissi a 28′, riparte a 29′, giunge a Pellazzano a 1^h e 38′, riparte a 1^h e 40′ per giungere a Fratte a 10^h e 56′ ed arriva a Salerno a 2^h e 5′. Si noti che ogni tratto della corsa si fa terminare con due trattini verticali, messi per meglio indicare il punto in cui il tratto incontra la linea della Stazione.

§ 3 — Diagramma del trinomio di 2.° grado $y = ax^2 + ba + c$.

11. Diagramma della funzione $y = ax^2$.

La funzione $y = x^2$ è soddisfatta dalle seguenti coppie di valori:

$x = 0$ $y = 0$

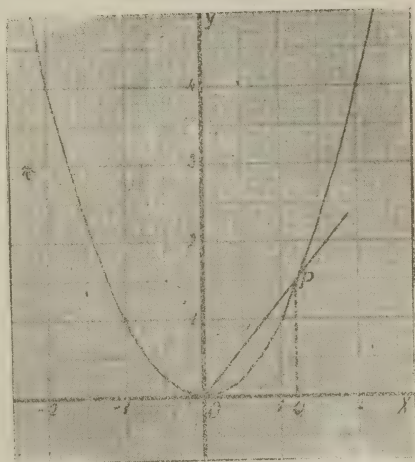
$x = \pm 1$ $y = 1$

$x = \pm 2$ $y = 4$

$x = \pm 3$ $y = 9$

. . . .

$x = \pm 100$ $y = 10000$

. . . .

E si rileva da ciò che la linea del diagramma è simmetrica rispetto all'asse OY, e si trova tutta da una parte dell'asse OX.

Nel campo negativo di x la y è positiva, e diminuisce coll'aumentare dell'ascissa x, fino a diventare zero quando x diviene eguale a zero, e si dice perciò che la funzione è *decrescente* a sinistra di O.

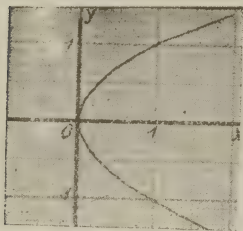
Nel campo positivo di x la y è positiva, e aumenta coll'aumentare dell'ascissa, e si dice perciò che la funzione è *crescente* a destra di O.

Dal triangolo rettangolo OQP, si ha

$$\text{tg POQ} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{y}{x} = \frac{x^2}{x} = x ,$$

quindi l'angolo QOP diminuisce col diminuire di x, e diviene zero quando $x = 0$, cioè la corda OP coincide con l'asse OX quando P coincide con O, e perciò OX è *tangente* alla curva in O.

Sicchè l'andamento del diagramma della funzione $y=x^2$ è quello disegnato nella figura, e si può ottenere facilissimamente con la carta millimetrica. Variando l'unità di misura si ottiene un diagramma più grande o più piccolo ma tutti sono simili fra loro.

Questa curva si dice *parabola*: il punto O si dice *vertice* della parabola, l'asse OY si dice *asse della parabola*, l'asse OX è la *tangente al vertice* della curva.

12. Per la funzione $x=y^2$ il diagramma sarà lo stesso del precedente rotato di un quarto di giro nel verso delle lancette dell'orologio.

13. La curva $y=-x^2$ differisce dalla precedente $y=x^2$ per il segno della y, che è sempre negativo, quindi essa è la simmetrica della prima figura rispetto all'asse delle x; ovvero è quella che si ottiene rotando la prima di mezzo giro intorno ad O.

14. La funzione $y=ax^2$ ha un diagramma simile al precedente. Difatti, dalla data funzione si ricava $ay=(ax)^2$ e quindi per

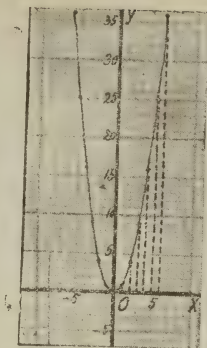
$$x=0 \qquad y=0$$

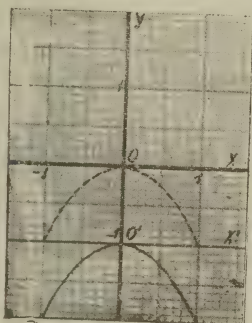
$$x=\pm\frac{1}{a} \qquad y=\frac{1}{a}$$

$$x=\pm\frac{2}{a} \qquad y=\frac{4}{a}$$

. . . .

e ciò mostra che se si assume $\frac{1}{a}$ come unità di misura per x e per y si ha la stessa curva di prima.

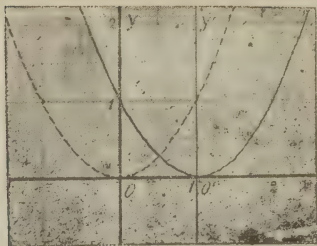
Per es.: $y=10x^2$ nella scala in cui l'unità è il centimetro ha per diagramma la curva che si ottiene per l'equazione $y=x^2$ prendendo per unità di misura il millimetro.

15. Diagramma della funzione. $y=ax^2+b$.

La funzione $y=ax^2+b$ si può scrivere $y-b=ax^2$ e posto $y-b=y'$, si riduce ad $y'=ax^2$, funzione che sappiamo già costruire.

Dalle ordinate di questa si ottengono quelle della funzione data aumentandole della costante b e quindi il diagramma della funzione data $y=ax^2+b$ è lo stesso diagramma della funzione $y'=ax^2$ trasportato di un segmento equipollente a b.

Per esempio, la funzione $y=-x^2-1$, ha per diagramma quello che si ottiene dal diagramma di $y=-x^2$ dopo una traslazione parallela ad OY di un'unità negativa.

16. Diagramma della funzione $y=a(x-x)^2$.

La funzione $y=a(x-c)^2$ si riduce anch'essa alla precedente ponendo $x-c=x'$; essa si trasforma con ciò in $y=ax'^2$, di cui il diagramma è noto. Dalle ascisse di questa curva otteniamo quella della funzione $y=a(x-c)^2$, aumen-

tandole tutte di un segmento eguale a c; quindi il diagramma di questa ultima funzione si ottiene dalla funzione $y = ax^2$, trasportandolo parallelamente al segmento $OO' = c$.

Per esempio, il diagramma della funzione $y = (x - 1)^2$ si ottiene dal diagramma di $y = x^2$, con una traslazione parallela ad OX di una unità.

17. Consideriamo infine la funzione di secondo grado completa $y = ax^2 + bx + c$, Questa si può scrivere

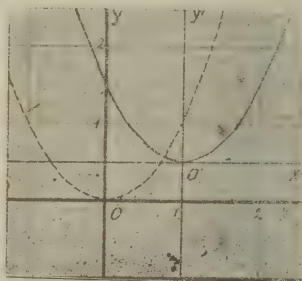
$$y = a \left\{ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right\},$$

ovvero

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

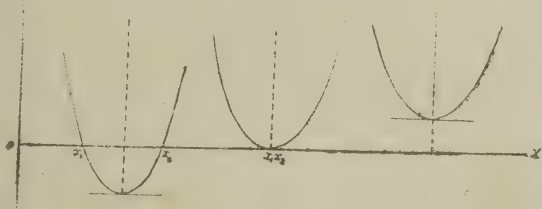
e quindi il suo diagramma si ottiene dal diagramma di $y = ax^2$ con una traslazione parallela all'asse OY ed eguale al segmento $\frac{4ac - b^2}{4a}$, e con una seconda traslazione parallela all'asse OX ed $= -\frac{b}{2a}$.

Per esempio la curva $y = x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ si può scrivere $y = (x - 1)^2 + \frac{1}{2}$, e quindi si può ricavare dalla curva $y = x^2$ con una traslazione parallela ad OY per mezza unità positiva, e con una traslazione parallela od OX per una unità positiva.

Si può dunque conchiudere che qualunque funzione di 2.° grado è sempre rappresentata da una curva del

tipo $y = x^2$ o $y = -x^2$, con una scala diversa ed avente il vertice nel punto di coordinate

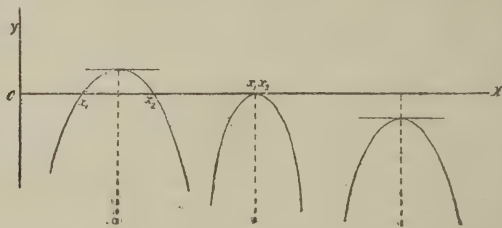
$$-\frac{b}{2a}, \quad \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

18. Variazione del trinomio di 2.° grado.

Con la conoscenza del diagramma del trinomio di 2° grado, possiamo discutere la sua variazione per rispetto alle radici in tutte le sue particolarità. Se a è positivo e le radici sono reali, già sappiamo che il trinomio prende valori positivi all'esterno dell'intervallo delle radici e valori negativi all'interno di esse; dippiù possiamo notare che per $x = \pm\infty$, è $y = +\infty$, mentre che per $x = -\frac{b}{2a}$, cioè nel punto medio dell'intervallo delle radici, esso prende il valore $\frac{4ac-b^2}{4a}$ che, essendo la ordinata del vertice, è il minimo valore che il trinomio può prendere. Sicché dovendo la funzione decrescere quando x varia da $-\infty$ a $-\frac{b}{2a}$ passando per la radice x_1, e poi crescere quando x varia da $-\frac{b}{2a}$ a $+\infty$ passando per la radice x_2, si deduce che la rappresentazione geometrica del trinomio

a radici reali e distinti è quella indicata dalla prima parabola a sinistra della figura qui delineata. Se le radici del trinomio sono eguali, $\frac{4ac-b^2}{4a} = 0$, e quindi il vertice della parabola sta nel punto $-\frac{b}{2a}$, e siccome la funzione è positiva per tutti gli altri valori della variabile numerica, e deve decrescere nell'intervallo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ e cre-

scere nello intervallo $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ ne risulta che la rappresentazione del trinomio è in questo caso data dalla parabola intermedia segnata nella figura. Se invece le radici del trinomio sono complesse, la funzione è sempre positiva per tutti i valori della variabile numerica, ed ha per rappresentazione quella assegnata dalla parabola a dritta della figura precedente.

Se invece a è negativo, per $x = \pm\infty$ è $y = -\infty$ e quindi se le radici sono reali e distinte la rappresentazione geometrica è quella della prima parabola a sinistra della figura seguente, se sono reali ed eguali è quella della seconda pa-

rabola, e se sono complesse è quella della terza parabola.

19. Risoluzione grafica di un'equazione di 2° grado. — La risoluzione dell'equazione di 2° grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si può ottenere graficamente: o costruendo il diagramma del trinomio e trovando i valori delle ascisse dei punti d'intersezione della figura coll'asse delle ascisse come risulta dalla precedente discussione; oppure mediante il sistema di equazioni

$$y = ax^2$$
$$y + bx + c = 0 .$$

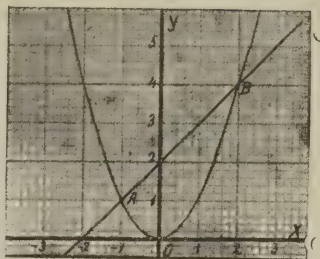
La prima di questa equazione ha per diagramma una parabola che si può costruire facilmente colla carta millimetrica, la seconda una retta, i punti comuni alle due linee hanno per ascisse le radici della data equazione.

Per es. l'equazione

$$x^2 - x - 2 = 0$$

si risolve graficamente mediante il sistema

$$y - x - 2 = 0$$
$$y = x^2 .$$

Preso per unità il mezzo centimetro si costruisce la parabola $y = x^2$, e la retta che taglia sull'asse OX il segmento -2 e sull'asse OY il segmento $+2$. Le due linee si segano nei punti A e B le cui ascisse sono $-1, 2$, e si conchiude che le radici dell'equazione data sono $-1, 2$.

§ 4. — Diagramma della funzione $y = \frac{k}{x}$.

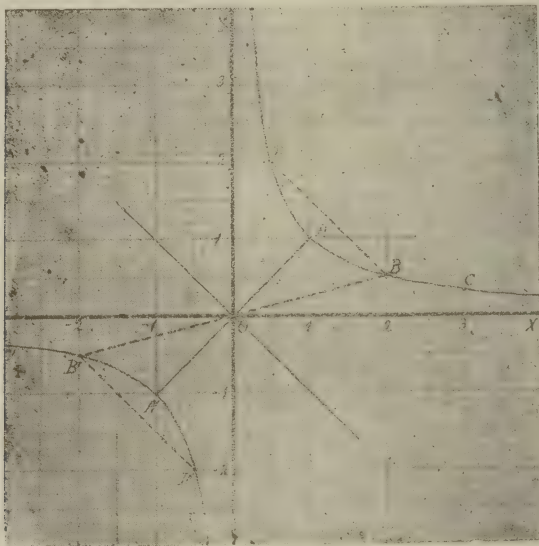
20. DIAGRAMMA DELLA FUNZIONE $y = \frac{1}{x}$. Questa funzione è inversamente proporzionale alla variabile; essa è dello stesso segno della variabile, cosicché i punti del suo diagramma stanno tutti nel primo angolo e nel terzo, e non ve ne sono nel secondo e nel quarto angolo.

Quando $x = \pm 1$ $y = \pm 1$ e si hanno i punti A ed A',
» $x = \pm 2$ $y = \pm \frac{1}{2}$ » » B e B',
» $x = \pm 3$ $y = \pm \frac{1}{3}$ » » C e C'.

La curva è simmetrica rispetto al centro O perchè tutte le rette AA', BB', CC' passano pel centro e sono da esso divise per metà.

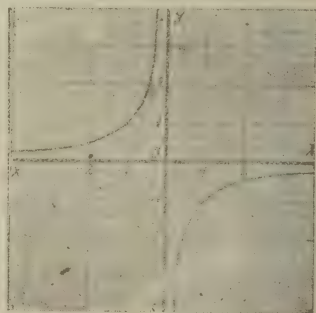
Per x estremamente grande positivo o negativo y è estremamente piccolo positivo o negativo, onde la curva del diagramma si va avvicinando all'asse OX senza mai raggiungerlo. Si dice perciò che quest'asse è un *asintoto* della curva.

La reciproca della funzione data, $x = \frac{1}{y}$ è identica alla funzione diretta e quindi se si fa rotare il piano intorno

ad OA e l'asse delle x si scambia con quello delle y una parte della curva andrà a coincidere coll'altra e se ne deduce che la curva è simmetrica rispetto alla retta OA e che l'asse delle y è un altro asintoto della curva. La retta AA' dicesi asse della curva ed A ed A' diconsi vertice della curva.

La curva è pure simmetrica rispetto alla bisettrice del 2° e 4° angolo che dicesi anche asse ideale della curva.

Questa curva speciale si chiama *iperbole equilatera* riferita agli asintoti.

21. La funzione $y = -\frac{1}{x}$.

Nella funzione $y = -\frac{1}{x}$ la variabile e la funzione sono sempre di segno contrario quindi la curva che ne rappresenta il diagramma è la stessa curva precedentemente trovata rotata di 90 gradi intorno ad uno degli asintoti.

22. La funzione $y = \frac{a^2}{x}$. Questa funzione si può scrivere $\frac{y}{a} = \frac{1}{\frac{x}{a}}$ e quindi per

$$x = \pm a \qquad y = \pm a$$
$$x = \pm 2a \qquad y = \pm \frac{a}{2}$$
$$x = \pm 3a \qquad y = \pm \frac{a}{3}$$

il che mostra che se si assume a come unità di misura tanto per x che per y si ha la stessa curva di prima.

Sia per es. $y = \frac{100}{x}$. Questa curva descritta con l'unità millimetro coincide con la curva $y = \frac{1}{x}$ descritta con l'unità centimetro, poiché nella prima per x=10 mm. si ha y=10 mm. come nell'altra $y = \frac{1}{x}$ si ha per x=1 cm. y=1 cm. (Tutte le iperbole equilatere sono quindi curve simili fra loro).

Per $y = \frac{k}{x}$, se $k = a^2$ si ha la curva della figura del n. **20** e se $k = -a^2$ si ha la curva della figura del n. **21**.

§ 5. — Diagramma della funzione omografica.

23. La funzione $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ dicesi *funzione omografica*, e comprende come caso particolare la funzione $y = \frac{k}{x}$, a cui si riduce quando fosse $b' = a = 0$, ed $a' \neq 0$, e come altro caso particolare si ha la funzione lineare a cui si riduce quando fosse $a' = 0$.

Liberandola da' fratti questa funzione diviene implicita della forma seguente

$$a'xy + b'y - ax - b = 0 \qquad (1)$$

ed è di primo grado rispetto a ciascuna delle variabili (si dice perciò *funzione bilineare*).

Viceversa una funzione bilineare a due variabili

$$Axy + Bx + Cy + D = 0$$

risoluta rispetto ad y o ad x dà le funzioni omografiche

$$y = -\frac{Bx + D}{Ax + C}, \quad x = -\frac{Cy + D}{Ay + B}$$

per le quali ad ogni valore di x corrisponde un valore di y e ad ogni valore di y un valore di x.

In particolare la funzione omografica data per mezzo della (1) dà

$$x = -\frac{b'y - b}{a'y - a} \qquad (2)$$

24. La funzione omografica si dice *funzione omografica generale* se $ab' - a'b \neq 0$, e si dice *funzione omografica singolare* o *degenere* se $ab' - a'b = 0$.

Cominciamo dal secondo caso. Posto nella funzione data in evidenza a al numeratore e a' al denominatore, essa diviene

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{a'\left(x + \frac{b'}{a'}\right)}$$

e poiché per essere $a'b - a'b = 0$, si ha $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, ne risulta che per qualunque valore di x diverso da $-\frac{b'}{a'}$, questa funzione diviene $y = \frac{a}{a'}$ e rappresenta perciò una retta parallela all'asse della x.

Per $x = -\frac{b'}{a'}$ essa non ha significato perché diviene della forma $y = \frac{0}{0}$, ma ragionando sulla (2) allo stesso modo si ha $\left(\text{per essere } \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}\right)$

$$x = -\frac{b'\left(y - \frac{b}{b'}\right)}{a'\left(y - \frac{a}{a'}\right)} = -\frac{b'}{a'},$$

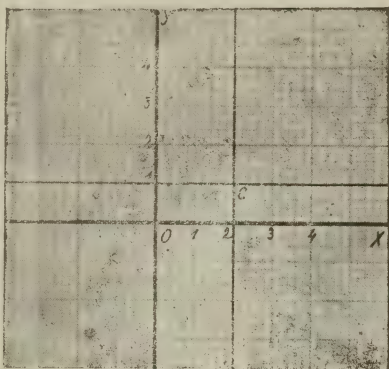
per qualunque valore di y diverso da $\frac{a}{a'}$, e perciò rappresenta una retta parallela all'asse della y.

Dunque, quando

$$ab' - a'b = 0$$

la funzione omografica ha per diagramma due rette

$$y = \frac{a}{a'} \quad , \quad x = -\frac{b'}{a'} \ .$$

Per esempio, la funzione $y = \frac{x-2}{x-2}$ rappresenta due rette parallele agli assi, l'una che passa pel punta 1 dell'asse OY, e l'altra pel punto 2 dell'asse OX.

25. Esaminiamo ora il caso generale: $ab' - a'b \neq 0$.

Il denominatore della funzione sempre si annulla per $x = -\frac{b'}{a'}$, e questo valore non annulla il numeratore, e quindi y nell'intorno del punto P dell'asse delle x di coordinate $-\frac{b'}{a'}$ diviene grande quanto si vuole. Si dice per questo fatto che il punto P è un *polo* o un *infinito* della funzione.

Esaminiamo intanto che

$$y - \frac{a}{a'} = \frac{ax+b}{a'x+b'} - \frac{a}{a'} = \frac{ba' - ab'}{a'(a'x+b')} = \frac{ba' - ab}{a'\left(x + \frac{b'}{a'}\right)}$$

e posto $k = \frac{ba' - ab'}{a'^2}$ si ha

$$y - \frac{a}{a'} = \frac{k}{x + \frac{b'}{a'}}$$

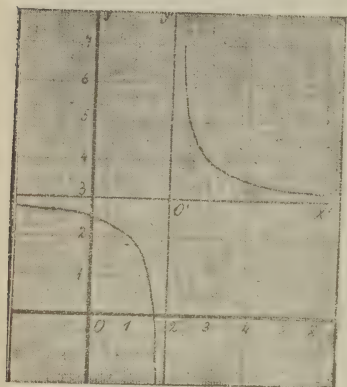
e qualora si ponga $y' = \frac{a}{a'}$ $x' = -\frac{b'}{a'}$, la funzione data

*

si può scrivere $$y - y' = \frac{k}{x - x'},$$

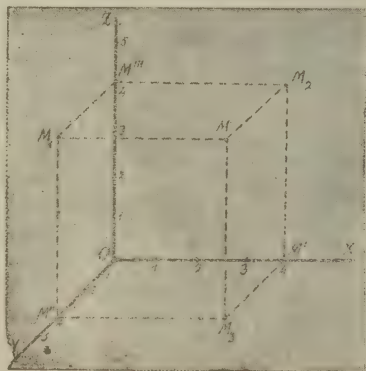
e se poniamo $y - y' = Y$, $x - x' = X$ essa si scrive

$$Y = \frac{k}{X},$$

e quindi diviene la stessa funzione che abbiamo già studiata precedentemente e che perciò è una *iperbole equilatera* i cui asintoti sono dati dalle rette.

$$y = \frac{a}{a'} \quad , \quad x = -\frac{b'}{a'} .$$

Per esempio, la funzione $y = \frac{3x - 5}{x - 2}$ rappresenta un'iperbole equilatera i cui asintoti passano pel punto 3 dell' asse OY e pel punto 2 dell'asse OX ed è quella rappresentata dalla figura qui riportata.

§ 6. — **Cenno sulle coordinate dello spazio.**

26. Dato un punto M dello spazio e fissato un piano orizzontale è sempre possibile trovare la proiezione ortogonale M_3 del punto sul piano; viceversa se è fissata la proiezione M_3 del punto M si può ritrovare il punto, qualora si sappia a quale distanza il punto si trova dal piano, convenendo che una distanza positiva significa che il punto sta al di sopra del piano, e che una distanza negativa significa che il

punto sta al disotto del piano. Questa distanza si chiama la *quota* del punto.

La posizione del punto M_3 nel piano è fissata se nel piano si assegnano due assi di coordinate OX, OY; quindi con 3 numeri, due dei quali fissino le coordinate di M_3, e il terzo la quota di M, si determina la posizione di M nello spazio.

Praticamente ciò si ottiene fissando gli assi OX, OY nel piano che si assume orizzontale, e un terzo asse OZ perpendicolare al piano XOY nell'origine O. Su questo terzo asse fissando l'unità di misura si determina la quota di M.

Dato il punto M, conducendo per esso tre piani paralleli rispettivamente ai piani YOZ, ZOX, XOY si determinano sugli assi OX, OY, OZ le sue tre coordinate, e viceversa date le tre coordinate OM′, OM″, OM‴, conducendo per i loro estremi i piani suddetti, questi si segano in un punto che è il punto M da esse individuato.

I tre piani XOY, YOZ, ZOY, supposti illimitati dividono lo spazio in 8 parti (angoli triedri trirettangolari).

Le coordinate dei punti di ciascuno di questi angoli hanno i seguenti segni

$$\begin{array}{cccc} & ++- & +-- & \\ +++ & +-+ & -+- & --- \\ & -++ & --+ & \end{array}$$

Un punto che ha una coordinata zero sta sul piano degli altri due assi. Un punto che ha due coordinate zero sta sull'asse della terza coordinata. L'origine è rappresentata da tre coordinate 0.

§ 7. — Applicazioni.

27. Moto verticale dei gravi. Si verifica in Fisica che un grave abbandonato a se stesso nel vuoto percorre a Napoli m. 4,901 nel primo minuto secondo della caduta, e fu dimostrato da Galileo Galilei *) che *gli spazi per-*

*) Galileo Galilei (1564-1642) ha trattato del moto dei gravi nella 3ª giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (cfr. vol. 8 delle *Opere di Galilei*, ediz. Favaro). Egli chiama questo moto, *moto naturalmente accelerato* e lo definisce così: *Moto naturalmente accelerato è quello pel quale un mobile partendo dalla quiete in tempi eguali soffre eguali accrescimenti di velocità.*

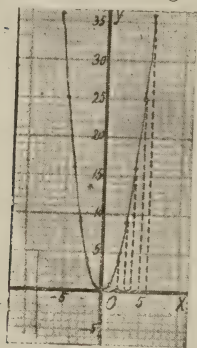
corsi dal grave nella caduta sono proporzionati ai quadrati dei tempi impiegati a percorrerli. Cosicché se s è lo spazio che il grave percorre nel tempo t'' si deve avere la proporzione

$$s : 4{,}901 = t''^2 : 1''^2$$

donde risulta
$$s = 4{,}901 \cdot t^2$$

e se indichiamo come si usa con $\frac{1}{2}g$ il numero 4,901 (per la qual cosa $g = 9{,}802$ *) si ha la formula

$$s = \frac{1}{2}gt^2 .$$

Per avere il diagramma dello spazio percorso dal grave nella caduta si rappresentano, come abbiamo già usato pel moto uniformemente rettilineo, i tempi variabili sull'asse dell'ascisse, e gli spazii variabili sull'asse delle ordinate,

e poiché la funzione s è di 2° grado in t del tipo studiato nel n. **14**, il diagramma che la rappresenta è una parabola avente il suo vertice nell'origine delle coordinate e l'asse rivolto in alto.

Il segmento che si sceglie per unità del tempo è indipendente da quello che si sceglie per unità dello spazio: per avere una parabola sufficientemente allungata (e facile a costruire) si può rappresentare con un segmento eguale all'unità del tempo lo spazio $\frac{1}{2}g$ e in tal caso la curva che rappresenta il moto del grave è la figura che qui si riporta.

Da questa figura si rileva che, mentre nel primo minuto secondo lo spazio è 1, nel secondo minuto secondo il grave percorre uno spazio 3, nel terzo minuto secondo percorre

*) Il valore di g si dice *gravità* relativa al dato sito. La gravità al polo ha il valore di m. 9,831, all'equatore m. 9,781, a 45° di latitudine m. 9,806, a Napoli m. 9,802.

uno spazio 5, nel quarto 7, e così seguitando; e cioè che gli spazii percorsi nei successivi tempi sono proporzionali ai numeri dispari successivi.

Da questa osservazione si deduce che il moto della caduta del grave non è uniforme, poichè gli spazii percorsi nei successivi tempi sono crescenti, nè si può parlare più di velocità nel senso già espresso nel moto uniforme.

Invece in questo movimento che dicesi *moto vario accelerato*, la velocità in ogni istante si definisce quella che avrebbe il grave nell'istante successivo, se, cessando la causa che fa variare il moto, il corpo continuasse a muoversi con moto uniforme.

Si dimostra in Fisica, e lo dimostreremo pure in seguito, che la velocità è proporzionale al tempo e che essa è legata al tempo dalla formula

$$v = gt\ ;$$

per questo motivo il moto generato dalla gravità nei corpi nel vuoto si dice *moto uniformemente vario*, e poichè la velocità cresce proporzionalmente al tempo nella caduta si dice anche *uniformemente accelerato.*

Il diagramma della velocità è una retta passante per l'origine e di coefficiente angolare eguale a g.

28. Un corpo che fosse lanciato dal basso in alto con velocità iniziale v_0, se non fosse soggetto alla gravità percorrerebbe il suo cammino con moto uniforme dato da $s_0 = v_0 t$; ma agendo la gravità in senso opposto con la legge $s_1 = \frac{1}{2} gt^2$, lo spazio che il grave percorre nel tempo t deve essere differenza degli spazii che percorrerebbe isolatamente, e quindi è dato dalla formula

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 .$$

Il movimento del grave in questo caso dicesi *uniformemente ritardato.* Il suo diagramma è dato da una parabola che ha l'asse rivolto in basso e per vertice (n. **17**) il punto di coordinate

$$\frac{v_0}{g}\ ,\ \frac{v_0^2}{2g}\ .$$

Ciò fa comprendere che il punto sale fino all'altezza $\frac{v_0^2}{2g}$, in un numero di secondi $= \frac{v_0}{g}$; dopo di che il moto diventa *discendente* e *uniformemente accelerato*, e ripassa pel punto di partenza dopo un tempo doppio di quello che ha impiegato a salire, perché l'equazione

$$-\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t = 0$$

ha per radici $t = 0$, $t = \frac{2v_0}{g}$. Passato questo tempo il moto continua discendente e uniformemente accelerato.

La velocità del moto uniformemente ritardato è data da

$$v = v_0 - gt$$

e il suo diagramma è una retta che taglia l'asse delle ordinate alla distanza v_0 dall'origine, e l'asse delle ascisse dalla distanza $t = \frac{v_0}{g}$ dall'origine, che segna appunto l'istante in cui il mobile comincia la discesa, in quell'istante la sua velocità è zero.

19. Un corpo lanciato verticalmente dall'alto in basso con velocità v_0 ha per equazione

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 ,$$

e il suo diagramma è una parabola coll'asse rivolto in alto e col vertice nel punto di coordinate

$$-\frac{v_0}{g} , \quad -\frac{v_0^2}{2g} .$$

Lo studioso farà da sè la figura del diagramma sulla carta millimetrica.

20. Problema (del pozzo). *Si è lasciata cadere una pietra in un pozzo e dopo* t *secondi si è inteso il tonfo della caduta nel fondo. Trovare la profondità del pozzo, sapendo che il suono percorre lo spazio con la velocità di* v *metri a secondo, che gli spazi percorsi da un corpo sono proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati a per-*

correrli e che lo spazio percorso dal grave nel primo secondo è $\frac{g}{2}$. *Si trascuri la resistenza dell'aria.*

Sia x la profondità del pozzo. Il tempo t è la somma del tempo t_1 impiegato dal corpo a cadere nel fondo, e del tempo t_2 impiegato dal rumore del tonfo della caduta a giungere al nostro orecchio.

Lo spazio percorso dalla pietra in t_1 secondi è $= \frac{g}{2} t_1^2$, e lo spazio percorso dal suono nel tempo t_2 è $x = vt_2$, da queste formole si deduce che $t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$, $t_2 = \frac{x}{v}$;

e che l'equazione che risolve il problema è

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = t \; . \qquad (1)$$

Isolando il radicale, si ha

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v} \; ,$$

elevando a quadrato,

$$\frac{2x}{g} = t^2 - \frac{2xt}{v} + \frac{x^2}{v^2} \; ,$$

liberando dai fratti ed ordinando,

$$gx^2 - 2v(gt + v)x + v^2gt^2 = 0 \; .$$

Risolvendo, si ha

$$x = \frac{v(gt + v) \mp v\sqrt{2vgt + v^2}}{g} \; .$$

A questo risultato si giunge anche risolvendo la (1) rispetto a $\sqrt{x}$.

Il discriminante dell'equazione è positivo, quindi le due radici sono reali e diseguali; e siccome il termine noto è positivo, e il coefficiente del secondo termine è negativo, le due radici sono entrambe positive Ma affiché una radice soddisfi il problema non basta che sia positiva, deve anche rendere positiva la differenza $t - \frac{x}{v}$, cioè deve essere $x < vt$. Per verificare se ciò avviene per qualcuna delle radici, possiamo usare due modi: o far la verifica

diretta, e si trova che la radice minore è $<vt$, e la maggiore è $>vt$; oppure sostituire vt ad x nel primo membro e vedere che segno esso assume. Si trova che il primo membro dell'equazione diventa negativo, e siccome è positivo il primo coefficiente, se ne conchiude che vt è un valore compreso fra le due radici.

Cosicché si può conchiudere che la profondità del pozzo è

$$\frac{vgt + v^2 - v\sqrt{2vgt + v^2}}{g}$$

e che l'altra radice soddisfa invece l'equazione

$$-\sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{v} .$$

21. LEGGE DI BOYLE E MARIOTTE. Si dimostra in Fisica che a *temperatura costante, il volume che un gas occupa in un vaso è inversamente proporzionale alla pressione che esso sopporta.*

Cosicché, se v rappresenta il volume del gas e p la pressione esercitata su di esso, e k è una costante (che dipende dalla natura del gas e dalla temperatura fissata).

$$v = \frac{k}{p}$$

rappresenta la legge di Boyle e Mariotte.

Il diagramma di questa funzione è un iperbole equilatera limitata al ramo del 1° angolo degli asintoti (o degli assi di coordinate).

Esercizi.

1. La temperatura di un ammalato di variola è stata la seguente:

		Mattina	Sera
2	Aprile	40	40,3
3	»	39,9	39,2
4	»	38	37,9
5	»	38	38,4
6	»	38	38,3
7	»	38	39
8	»	38,6	40
9	»	38,6	40,2

		Mattina	Sera
10	Aprile	39,2	39,8
11	»	38,6	39,2
12	»	38,2	39,4
13	»	37,4	38,8
14	»	37,4	39
15	»	37,4	38,2
16	»	37,2	37,6
17	»	37,2	37,4
18	»	37	

Fare il diagramma della febbre facendo corrispondere 1 cm. a 1^0 e 1 cm. a 12 ore.

2. Costruire le rette rappresentate dalle equazioni:

$$x = 2y + 5 \quad ; \quad x = 3y - 6 \quad ; \quad y = 2x - 3$$

prendendo come unità il cm.

3. Costruire le stesse rette prendendo come unità il mm.

4. Costruire la retta rappresentata dalle equazioni

$$y = \frac{1}{4} x + 15 \quad ; \quad x = -\frac{y}{5} + \frac{2}{3}$$

prendendo come unità il cm.

5. Costruire le rette rappresentate dalle equazioni

$$\begin{aligned} &3x + 2y = 5 \\ &5x - 4y - 2 = 0 \\ &2x - 7 = 0 \\ &3y + 4 = 0 \end{aligned}$$

prendendo come unità il mezzo centimetro.

6. Trovare graficamente la soluzione del sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} 5x - \ \ 7y &= 20 \\ 9x - 11y &= 44 \end{aligned} \qquad \text{R. } (11,5)$$

prendendo come unità il cm.

7. Idem:

$$\begin{aligned} 17x - 13y &= 144 \\ 23x + 19y &= 890 \end{aligned} \qquad \text{R. } (23,19)$$

prendendo come unità il mm.

8. Idem:

$$\begin{aligned} 260 &= 24x + 35y \\ 28y - 15x &= 80 \end{aligned} \qquad \text{R. } (5,4)$$

prendendo come unità il mm.

9. Trovare la pendenza della retta

$$ax + by = c \ .$$

10. In occasione di una funzione sportiva fra due stazioni distanti 40 km. si stabilisce che dalle 14 alle 18 abbia luogo da ogni estremo la partenza di un automobile ogni 10 minnti e che alla fine della corsa ogni automobile ritorni alla stazione donde è partito. Sapendo che la durata del percorso è di un'ora si chiede quanti automobili occorre mettere in movimento. Numerati in ordine progressivo quelli di una stazione e in seguito quelli dell'altra si chiede l'automobile n. 1 quante volte incontra gli altri automobili e a che ora e a che distanza dalla stazione di partenza e a che ora rientra alla stazione, e così per gli altri. Si faccia il diagramma delle corse prendendo come unità di ora 3 cm. e come unità di km il mm.

11. In qual caso le rette rappresentate dalle equazieni:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

sono parallele?

12. Costruire la parabola $y = -\frac{4}{5}x^2$ prendendo per unità il centimetro, o il millimetro o il decimetro.

13. Costruire la curva $y = 200x^2$ prendendo per unità il decimetro.

14. Costruire le parabole:

$$y = 2x^2 + 3 \; , \; y = -3x^2 + 5 \; , \; y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \; , \; y = 7 - 2x^2 \; , \; y = 3x^2 + 5x - 7 \; ,$$

$$y = 5 - 4x - x^2 \; , \; y = 4x^2 - 3x - 4 \; , \; y = 2x^2 - \frac{x}{3} + 4$$

scegliendo opportunamente l'unità di misura.

15. Determinare le ascisse dei punti d'incontro della curva

$$y = x^2 \qquad \text{e della retta} \qquad y = -7x + 10 \; .$$

16. Determinare le soluzioni comuni alle equazioni:

$$x^2 - y = 0 \quad , \quad y + 5x - 16 = 0 \; .$$

17. Trovare le coordinate del vertice delle parabole:

$$y = 2x^2 + 7x - 1 \quad , \quad y = -6x^2 + 7x \quad , \quad y = 3x^2 + 6x - 1 \; .$$

18. Risolvere graficamente le equazioni seguenti:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad , \quad 3x^2 - 2x - 2 = 0 \quad , \quad 6x^2 + 4x - 5 = 0 \; .$$

19. Una pietra si lascia cadere nel vuoto dall'altezza di m. 5 da un punto O, un'altra è lanciata dalla stessa verticale dal punto O con velocità iniziale di 3 m. a secondi, trovare mediante i due diagrammi dei moti a che altezza si urteranno.

20. Sulla stessa retta da due punti A e B, si lanciano due mobili uno contro l'altro con moto uniforme l'uno e con moto uniformemente ritardato l'altro. Determinare con i diagrammi dove i due mobili s'incontrano.

21. Costruire le iperboli:

$$y = \frac{2}{x} \quad , \quad y = \frac{1500}{x} \quad , \quad y = \frac{0,01}{x} \quad , \quad y = \frac{-200}{x+10} \quad , \quad y = \frac{x-3}{2x+5} \; ,$$

prendendo opportunamente l'unità di misura.

22. Risolvere graficamente il sistema di equazioni:

$$x + 3x = 5 \; ,$$
$$xy = 1 \; .$$

23. Risolvere graficamente il sistema di equazioni:

$$y = x^2 - 5x$$
$$y = \frac{3x-1}{x+5} \; .$$

CAPITOLO SETTIMO.

FUNZIONI CONTINUE. DERIVATE. FORME INDETERMINATE. APPLICAZIONI.

§ 1. — Funzioni continue.

I. Funzioni continue e discontinue.

1.° *Una funzione si dice continua per* x = a, *quando a destra o a sinistra di* a *i limiti dei suoi particolari valori coincidono col valore che la funzione assume per* x = a.

In caso opposto la funzione si dice *discontinua* per $x=a$.

Si esprime che la funzione $f(x)$ è continua per $x = a$, scrivendo

$$\lim_{h=0} f(a \pm h) = f(a),$$

oppure, scrivendo più semplicemente,

$$f(a+0) = f(a) \qquad \text{ed} \qquad f(a-0) = f(a).$$

Se ha luogo una sola di queste eguaglianze, si dice che la funzione è continua *solo a destra o solo a sinistra* di a. Praticamente si suol riconoscere la continuità della funzione cercando se

$$\lim_{h=0} [f(a \pm h) - f(a)] = 0;$$

ma è bene tener presente che la definizione della continuità di una funzione è tutta contenuta nell'eguaglianza

$$\lim f(x) = f(\lim x).$$

2.° *Una funzione si dice continua in un intervallo* (a, b) *se è continua per ogni valore compreso in questo intervallo, ed è inoltre continua a destra di* x = a, *ed a sinistra di* x = b.

Se invece la funzione è *discontinua* per un punto solo

dell'intervallo considerato, essa si dice *discontinua* nell'intervallo stesso.

Per analogia diremo che una funzione è *continua nell'intervallo* (a, ∞) allorché è continua nell'intorno destro di a, ed è continua per tutti i valori di $x > a$; e che una funzione è *continua nell'intervallo* $(-\infty, a)$ allorché è continua nell'intorno sinistro di a, ed è continua per tutti i valori $< a$; e che una funzione è *continua nell'intervallo* $-\infty, +\infty$, quando è continua per ogni valore di x.

Per esempio la funzione *intera* di primo grado $ax + b$ è continua in qualunque intervallo finito, perché

$$\lim_{h=0} [a(x \pm h) + b - (ax + b)] = \lim_{h=0} (\pm ah) = 0 \ ^{*)}.$$

3° La *discontinuità* può aversi soltanto a destra o soltanto a sinistra di a o da entrambe le parti, e in questo ultimo caso le due discontinuità possono essere fra loro indipendenti.

Se consideriamo solo la discontinuità a destra di a notiamo che essa si può avere in due modi:

o quando esistendo il limite della funzione a destra di a, esso ha un valore finito diverso da $f(a)$ e in questo caso la discontinuità si dice *ordinaria* o di *1ª specie*;

oppure quando il limite della funzione a destra di a *non esiste* oppure *è infinito*, e in questo caso la discontinuità si dice di *2ª specie*.

Esempii: 1.° *È continua la funzione esponenziale* $y = a^x$.

Infatti,

$$\lim_{h=0} (a^{x+h} - a^x) = \lim_{h=0} a^x (a^h - 1) = \lim_{h=0} a^x \cdot \lim (a^h - 1) \ ;$$

ma si sa (Cfr. V, **38**, c) che $\lim_{h=0} a^h = 1$, dunque

$$\lim_{h=0} (a^{x+h} - a^x) = 0$$

e perciò la funzione è continua.

---

*) Questa proposizione è caso particolare del teor. 3.° del n. **2**.

2.° *È continua la funzione logaritmica* $y = \log x$.
Infatti,

$$\lim_{h=0} [\log(x+h) - \log x] = \lim_{h=0} \log \frac{x+h}{x} = \lim_{h=0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = 0 .$$

3.° *È continua la funzione potenziale* x^α (per α reale ed $x > 0$). Infatti, assumendo e come base di un sistema di logaritmi, essendo $\log x^\alpha = \alpha \log x$, si ha $e^{\alpha \log x} = x^\alpha$, e quindi

$$\lim_{h=0} \left\{ (x+h)^\alpha - x^\alpha \right\} = \lim_{h=0} \left\{ e^{\alpha \log(x+h)} - e^{\alpha \log x} \right\}$$
$$= \lim_{h=0} e^{\alpha \log x} \left\{ e^{\alpha \log(x+h) - \alpha \log x} - 1 \right\} = 0 .$$

4.° *Sono continue le funzioni* $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.
Infatti,

$$\lim_{h=0} \left\{ \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x \right\} = \lim_{h=0} \left\{ \operatorname{sen} x \cos h - \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x \right\} = 0$$

$$\lim_{h=0} \left\{ \cos(x+h) - \cos x \right\} = \lim_{h=0} \left\{ \cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x \right\} = 0 .$$

5.° *La funzione* $\frac{1}{x}$ *è discontinua in ogni intervallo* $(-a, a)$ *che comprende lo zero*, e la sua discontinuità nel punto zero è di 2^a *specie*, perché $\lim \frac{1}{x} = \pm \infty$, secondoché si cerca il limite destro o sinistro.

6.° *Le funzioni* $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, *sono tutte funzioni discontinue di* 2^a *specie.*

7.° *La funzione* $a^{\frac{1}{x}}$ (*per* $a > 1$) *è discontinua nell'intervallo* $(-\varepsilon, \varepsilon)$. E precisamente essa è *discontinua di* 2^a *specie a destra di* 0, perché, a destra di 0, $\lim a^{\frac{1}{x}} = \infty$. Invece *a sinistra di* 0 *è continua, se si conviene che per* $x = 0$, *il suo valore è* 0, perché a sinistra di 0, $\lim a^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$; ed *è discontinua di* 1^a *specie, se si conviene che per* $x = 0$ *debba assumere un valore diverso da* 0.

2. Teoremi sulle funzioni continue.

Teor. 1.° e 2.° *Se* $\varphi(x), \psi(x), \ldots$ *sono delle funzioni in numero finito continue per un* [illegible]

di x, *la funzione* $f(x) = \varphi(x) + \psi(x) + \dots$ *e la funzione* $F(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \cdot \dots$ *sono anch'esse continue per* $x = a$.

Infatti,

$$\lim f(x) = \lim \varphi(x) + \lim \psi(x) + \cdots$$

e per l'ipotesi fatta

$$= \varphi(\lim x) + \psi(\lim x) + \cdots = f(\lim x) \;;$$

ed analogamente

$$\lim F(x) = \lim \varphi(x) \cdot \lim \psi(x) \cdot \dots$$
$$= \varphi(\lim x) \cdot \psi(\lim x) \cdot \dots = F(\lim x) .$$

Applicazioni. 1.° x^n *è funzione continua di* x *nell' intervallo* $(-\infty, +\infty)$ *per qualunque valore di* n *intero e positivo*, perché è un prodotto di un numero finito di fattori x.

2.° ax^n *è funzione continua* (*per* n *intero e positivo ed* $a \neq 0$) *nell' intervallo* $(-\infty, +\infty)$.

3.° *Ogni funzione algebrica razionale intera di grado* n,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \;,$$

(per n *intero e positivo) è funzione continua nell' intervallo* $(-\infty, +\infty)$, perché è somma di un numero finito di funzioni continue (cfr. **1**, 2°).

3. Teor. 3.° *Se* $\varphi(x), \psi(x)$ *sono funzioni continue di* x *per* $x = a$, *e* $\psi(x)$ *non si annulla per* $x = a$, *la funzione* $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *è pure continua per* $x = a$.

Infatti,

$$\lim f(x) = \frac{\lim \varphi(x)}{\lim \psi(x)} = \frac{\varphi(\lim x)}{\psi(\lim x)} = f(\lim x).$$

Quindi: *Una funzione frazionaria che ha per termini due funzioni algebriche razionali intere di una determinata variabile indipendente* (*p. es. la funzione* $\dfrac{ax+b}{a'x+b'}$, *o la funzione* $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c}$) *è continua in ogni intervallo in cui non si annulla il denominatore.*

Se invece è $\psi(a) = 0$, senza essere zero $\varphi(a)$, quando x tende ad a, la funzione $\varphi(x)$ tende a $\varphi(a)$ e $\psi(a)$ tende

a zero, e quindi $y=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ aumenta indefinitamente, tende cioè all' ∞, in valore assoluto e quindi è discontina di 2ª specie per $x=a$.

Supponiamo ora che sia $\psi(a)=\psi_1(a)(x-a)^k$ e che $\psi_1(a)$ non sia zero. Se k è pari $(x-a)^k$ si mantiene sempre positivo, e quindi la funzione $y=\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)(x-a)^k}$ avrà a destra e sinistra di a per limite ∞ col segno di $\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}$; se invece k è dispari $(x-a)^k$ cambia segno quando x passa per a, e diviene negativa a sinistra, positiva a destra di a, e perciò la funzione y avrà a sinistra il segno contrario a $\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}$ e a destra il segno di $\frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}$, e quindi salta, quando x passa per a, da $-\infty$ a $+\infty$, o viceversa.

Per esempio la funzione omografica $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ è discontinua per $x=-\frac{a'}{b'}$, per il qual punto essa diviene infinita passando da $-\infty$ a $+\infty$, se non si annulla contemporaneamente il numeratore. Il punto $x=-\frac{b'}{a'}$ si dice *polo* o *infinito* della funzione (Cfr. Cap. VI, **25**).

4. Teor. 4.º *Se* $\varphi(x)$ *è funzione continua per* $x=a$, *la funzione* $f(x)=\sqrt[m]{\varphi(x)}$ *è pure continua per* $x=a$, *quando* m *è impari, qualunque sia il segno ed il valore di* $\varphi(a)$, *mentre lo è soltanto per* $\varphi(a)$ *positiva quando* m *è pari.*

Infatti,

$$\lim_{x=a} f(x)=\lim\,[\varphi(x)]^{\frac{1}{m}}=[\varphi(\lim_{x=a} x)]^{\frac{1}{m}}=[\varphi(a)]^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{\varphi(a)}$$

sempre che sia possibile la radice m^{esima} di $\varphi(a)$ e perciò qualunque sia il valore di $\varphi(a)$ ed il segno, se m è impari, e soltanto per $\varphi(a)$ positiva quando m è pari.

Così p. es. la funzione $\sqrt[3]{x^2-3x-2}$ è continua in tutto l'intervallo $(-\infty, +\infty)$; mentre la funzione $\sqrt{x^2-(a+b)x+ab}$ è

continua soltanto per i valori di x esterni all' intervallo (a, b), supposto $a < b$.

5. Teor. 5.° *Se* f(x) *è continua e diversa da zero per* x = a, *essa conserva intorno ad* a *il segno di* f(a).

Infatti, per ipotesi

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a)$$

e quindi, per la definizione del limite, dato un numero positivo ε, esiste un numero h tale che nell' intervallo $(a - h, a + h)$ è

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Questa diseguaglianza si scinde in

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon .$$

Posto $\varepsilon = |f(a)|$, si ha $f(x) > 0$ se $f(a)$ è positiva, si ha $f(x) < 0$ se $f(a)$ è negativo, e ciò dimostra il teorema.

6. Teor. 6.° *Una funzione continua in un intervallo finito* (a, b) *è pure finita nello stesso intervallo.*

Pel teorema precedente, la funzione intorno ad ogni valore x dell' intervallo, è compresa fra $f(x) - \varepsilon$ ed $f(x) + \varepsilon$, e quindi è finita intorno ad ogni valore dell' intervallo, e noi concederemo che ciò basti perché essa sia finita in tutto l' intervallo *).

7. Teor. 7.° *Se* f(x) *è una funzione di* x *continua nell' intervallo* (a, b), *e se negli estremi di questo intervallo i valori* f(a), f(b) *sono di segno contrario, esiste almeno un valore* α *dell' intervallo* (a, b) *per il quale* f(α) = 0.

Supponiamo che sia $f(a)$ positivo ed $f(b)$ negativo, che sia δ l'ampiezza $b - a$ dell' intervallo (a, b), e che sia c il medio aritmetico di a e b; $f(c)$ può essero negativo, positivo o nullo; se è nullo, il teorema è dimostrato, se non è nullo, sarà di segno contrario ad $f(a)$ o ad $f(b)$, e quindi la funzione data prenderà

*) Questa asserzione si dimostra rigorosamente (cfr. Cesàro, *Elem. di Calcolo infinitesimale*, 3ª ediz., p. 13), ma qui l'ammettiamo per brevità.

valori di segno contrario negli estremi di un intervallo di ampiezza $\frac{\delta}{2}$ metà dell' intervallo dato. Gli estremi di questo intervallo indichiamoli con a_1 e b_1, e sia c_1 il medio aritmetico fra a_1 e b_1. Con ragionamento analogo al precedente si conchiuderebbe che la funzione prenderà valori di segno contrario in un intervallo (a_2, b_2) di ampiezza $\frac{\delta}{2^2}$, e così seguitando si perverrà a stabilire che la funzione prende valori di segno contrario negli estremi di un intervallo (a_n, b_n) di ampiezza $\frac{\delta}{2^n}$, piccola quanto si vuole. Dippiù i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ non decrescono, i numeri $b_1, b_2, \ldots, b_n$ non crescono, ed ogni a_h è minore di qualunque b_h, dunque i numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ formano due classi contigue che individuano un numero α dell' intervallo (a, b). Dico che $f(\alpha) = 0$. Infatti $f(a_n)$ ed $f(b_n)$ sono di segno contrario, e per la continuità della funzione la loro differenza

$$|f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon,$$

e ciò dice che *)

$$|f(a_n)| + |f(b_n)| < \varepsilon,$$

cioè il limite di ciascuno di essi per a_n o $b_n = \alpha$ è zero; ma il loro limite comune è $f(\alpha)$, dunque $f(a) = 0$.

Coroll. *Se* f(x) *è continua nell' intervallo* (a, b), *ed* A *è un numero compreso fra* f(a) *ed* f(b), *deve esservi un valore di* x *dell' intervallo* (a, b) *per cui* f(x) = A.

Infatti, la funzione $f(x) - A$ è continua anch'essa nell' intervallo (a, b) e prende negli estremi di questo i valori $f(a) - A$, $f(b) - A$ che sono di segno contrario, dunque deve esserci un valore x dell' intervallo pel quale

$$f(x) - A = 0, \qquad \text{cioè} \qquad f(x) = A.$$

8. Applicazioni. 1.° *Ogni polinomio in* x *di grado dispari si annulla almeno per un valore reale di* x.

Infatti, se l è un numero tale che ogni valore di $|x| > l$ fa

*) Cfr. *Arit. part. e gen.*, Cap. III, n. **9**, sc. 1°; oppure *Aritm. ed Alg.*, Cap. III, n. **9**, sc. 1°.

assumere al polinomio $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ il segno del primo termine $a_0 x^n$ (cfr. V, **26**, 1⁰), per ogni valore $k > l$ si avrà che $f(k)$ ed $f(-k)$ sono di segno contrario, dunque esiste nell' intervallo $(-k, +k)$ un valore di x che annulla $f(x)$.

2.⁰ *Ogni polinomio in* x *di grado pari di cui il primo e l'ultimo termine sono di segno contrario si annulla almeno per un valore positivo e per un valore negativo di* x.

Infatti, se k è il numero determinato nel caso precedente, $f(-k)$ ed $f(k)$ avranno il segno del primo termine del polinomio, mentre $f(0)$ avrà il segno dell'ultimo termine, dunque negli estremi degli intervalli $(-k, 0)$ e $(0, +k)$ la funzione assume segni opposti, e quindi in ciascuno di questi intervalli vi è un valore di x che annulla la funzione.

3.⁰ *L'equazione*

$$\frac{A^2}{x-a} + \frac{B^2}{x-b} + \cdots + \frac{K^2}{x-k} + \frac{L^2}{x-l} + \lambda = 0$$

ove $A, B, \ldots, K, L$ *sono in numero di* m *ed* $a < b < \ldots < k < l$ *e* $\lambda \neq 0$, *ha precisamente* m *radici reali.*

Infatti, la funzione del primo membro è discontinua in ognuno dei valori $a, b, \ldots, k, l$ ed ha per limite $-\infty$ a sinistra di questi valori, e $+\infty$ a destra di essi, inoltre per $x = \pm\infty$ acquista il segno di λ, esso quindi è continua negli $m+1$ intervalli

$$(-\infty, a-\varepsilon), (a+\varepsilon, b-\varepsilon), \ldots, (k+\varepsilon, l-\varepsilon), (l+\varepsilon, +\infty)$$

ed esclusi gl' intervalli estremi, in ciascuno degli altri la funzione è negativa nell' intorno dell'estremo destro e positiva nell' intorno dell' estremo sinistro, quindi si annulla almeno una volta negli $m-1$ intervalli intermedii. Inoltre secondoché λ è positivo o negativo si annullerà pure nel primo a sinistra o nell'ultimo degl' intervalli estremi. Dunque la funzione si annulla almeno una volta in m intervalli e perciò ha m radici reali; ma non può avere più di m radici, perché essa, non annullandosi per nessuno dei valori che annullano i denominatori, è equivalente ad un'equazione intera di m^{esimo} grado, dunque possiamo anche precisare che la funzione ha una radice sola in ogni intervallo considerato.

9. FUNZIONI CONTINUE DI PIÙ VARIABILI.

Sia $f(x, y, z, \ldots)$ una funzione delle variabili indipendenti $x, y, z, \ldots$; se ad ogni sistema di valori $a, b, c, \ldots$ attribuiti ad $x, y, z, \ldots$ ciascuno in un determinato intervallo della variabile cui appartiene, corrisponde un determinato valore della funzione $f(a, b, c, \ldots)$, si dice che la funzione *è definita* nel *campo* di quegli *intervalli* delle variabili. Il sistema $a, b, c, \ldots$ dei valori attribuiti alle variabili si dice anche *punto* di quel campo.

Quando, assegnato un sistema $a, b, c, \ldots$ di valori delle variabili, avviene che per $h, k, l, \ldots$ tendenti a zero

$$\lim [f(a \pm h, b \pm k, c \pm l, \ldots) - f(a, b, c, \ldots)] = 0$$

si dice che la funzione è continua in quel punto del campo (o per quel particolare sistema di valori a, b, c, ... *delle variabili).*

Fissati i valori di tutte le variabili meno una, p. es. x, la funzione si può riguardare come funzione della sola variabile x, nel qual caso la differenza suddetta riducesi a

$$f(a \pm h, b, c, \ldots) - f(a, b, c, \ldots)$$

e se la funzione è continua rispetto al sistema delle variabili, sarà continua per rispetto alla x, e così pure per rispetto a ciascuna delle altre variabili isolatamente.

Non è però vera la reciproca di questa affermazione, poichè una funzione può essere discontinua anche se è continua rispetto a ciascuno delle variabili.

§ 2. — **Derivate.**

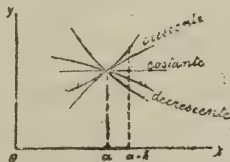
10. FUNZIONE CRESCENTE, DECRESCENTE, COSTANTE.

Una funzione $y = f(x)$ si dice *crescente* a destra di a quando è possibile determinare un numero positivo h, tale che i valori di $f(x)$ nell'intervallo $(a, a+h)$ siano tutti maggiori di $f(a)$.

Una funzione si dice *decrescente* a destra di a se i suoi valori nell'intervallo $(a, a+h)$ sono tutti minori di $f(a)$.

Una funzione si dice *costante* a destra di a se tutti i suoi valori nell'intervallo $(a, a+h)$ sono eguali ad $f(a)$.

Per l'andamento della funzione a sinistra di a deve av-

venire: che i suoi valori in un intervallo $(a-h, a)$ siano tutti *minori* di $f(a)$ per dirla crescente, siano tutti *maggiori* per dirla decrescente, e restino pure tutti eguali per dirla costante.

Sicché, rappresentando geometricamente la funzione, essa si deve comportare come nella figura qui riportata si presenta ciascuna delle linee terminate alla parola *crescente*, se essa è *crescente* intorno ad a; si deve comportare come ciascuna delle linee terminate alla parola *decrescente*, se essa è *decrescente* intorno ad a; e si deve comportare come una linea parallela all' asse OX, se essa è *costante* intorno ad a.

11. Si dice che una funzione è *crescente* in un intervallo (a, b), quando per ogni coppia di valori x_1, x_2, presi nell' intervallo, la differenza $f(x_1) - f(x_2)$ è dello stesso segno della differenza $x_1 - x_2$; si dice *decrescente* invece se le differenze suddette sono di segno contrario; si dice *costante* se la prima differenza è sempre nulla.

12. INCREMENTO DELLA FUNZIONE. DERIVATA.

La differenza $f(x \pm h) - f(x)$ si suole indicare con δy e si chiama *incremento* della funzione; la differenza $(x \pm h) - x$ (che è eguale a $\pm h$) si suole indicare con δx e si chiama *incremento* della variabile.

Il rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ dell' incremento della funzione all' incremento della variabile ha un particolare interesse per decidere dell' andamento della funzione nell' intorno di x; poiché, se la funzione è *crescente* il rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ è *positivo*, tanto a destra che a sinistra di x; ed egualmente se la funzione è *decrescente* il rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ è *negativo* a destra e a sinistra di x; e se la funzione è *costante* il rapporto è zero tanto a destra che a sinistra di x.

Allorquando per $x = a$ questo rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ tende a limiti determinati per h tendente a 0, e precisamente o per

$h = +0$ oppure per $h = -0$, questi limiti si dicono rispettivamente *prima derivata destra* e *prima derivata sinistra* della funzione nel punto $x = a$. Le due derivate possono coincidere, e in tal caso si dice che la funzione ha una *derivata unica* per quel valore di $x = a$.

La derivata di $f(x)$ in un punto qualunque x si rappresenta con $f'(x)$, o con y'.

Il rapporto dell'incremento della funzione all'incremento della variabile nel punto $x = a$ si può scrivere

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

e quindi, per la notazione adottata,

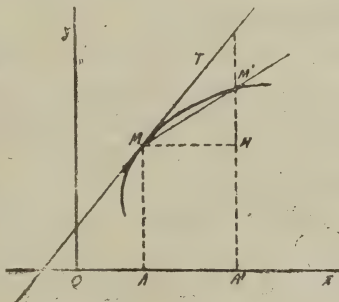
$$\lim_{x=a} \frac{f(x) - f((a)}{x - a} = f'(a) .$$

Gl'incrementi della funzione e della variabile si possono anche indicare con $f(x_1) - f(x_2)$, ed $x_1 - x_2$ supponendo che entrambe le x_1, x_2 tendano ad un valore unico x, e si scrive in tal caso

$$\lim_{x_1=x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x) .$$

13. Rappresentazione geometrica della derivata.

Se M è il punto del diagramma della funzione corrispondente all'ascissa x, ed M' il punto corrispondente all'ascissa $x + h$; condotta MH parallela ad AA', il segmento AA' = MH rappresenta δx, ed il segmento M'H rappresenta il δy; quindi pel triangolo rettangolo MM'H

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{M'H}{MH} = \operatorname{tg} M'MH .$$

Quando δx tende a zero il punto M' si avvicina ad M, la corda MM' tende a divenire la tangente in M, ed il rap-

porto $\frac{\delta y}{\delta x}$ tende a divenire y' e perciò

$$y' = \lim_{h=0} \frac{\delta y}{\delta x} = \operatorname{tg} \mathrm{TMH} \; .$$

Dunque: *la derinata di una funzione* f(x) *nel punto* $x = a$ *è eguale alla tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente geometrica in* M *fa con l'asse delle ascisse, qualora si sia pressa la stessa unità per le ascisse e per le ordinate.*

14. *Una funzione è crescente o decrescente alla destra (o alla sinistra) di* a *secondo che la sua derivata destra (o sinistra) è positiva o negativa per* $x = a$.

Se la derivata destra (o sinistra) della funzione y è positiva vuol dire che il rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ finisce col diventare e restare positivo quando δx tende a zero, e perciò δy finisce coll'assumere e conservare il segno di δx. Questo appunto dice che la funzione è crescente.

Allo stesso modo si conchiude che se la derivata è negativa la funzione è decrescente.

Se la derivata è nulla per $x = a$, il rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$, pur avendo per limite zero, può tendere ad esso conservando un segno stabilito o non, e quindi non si può dire con precisione che cosa sia la funzione nell'intorno di a.

15. *Una funzione è crescente o decrescente in un intervallo, secondo che la sua derivata, supposta unica, si conserva positiva o negativa nell'intervallo stesso.*

Infatti, se la derivata y', per fissare le idee, è positiva per tutti i valori di x di quell'intervallo, la funzione y è crescente in ogni punto dell'intervallo, e noi concederemo che ciò basti perché essa sia crescente nell'intervallo *).

16. Due funzioni si dicono *dello stesso verso* o di *verso contrario* secondo che sono entrambe crescenti o decrescenti, oppure una crescente e l'altra decrescente.

---

*) Ciò si dimostra però rigorosamente (Cfr. Cesàro, l. c., p. 47-48).

a) *Se* k *è una costante, la funzione* f(x) *è la funzione* f(x) + k *variano nello stesso verso in ogni intervallo* (a, b).

Infatti, se x_1, x_2 sono due valori di questo intervallo si ha

$$\{f(x_1) + k\} - \{f(x_2) + k\} = f(x_1) - f(x_2),$$

b) *Se* k *è una costante, le funzioni* f(x) *e* kf(x) *variano nello stesso verso se* k *è positiva, in verso contrario se* k *è negativa.*

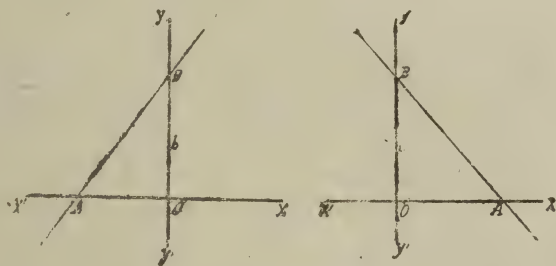
Infatti $$kf(x_1) - kf(x_2) = k[f(x_1) - f(x_2)],$$

e quindi, se $f(x_1) - f(x_2)$ ha il segno di $x_1 - x_2$, lo stesso avviene per la differenza $kf(x_1) - kf(x_2)$, se k è positiva; ed avviene il contrario, se k è negativa.

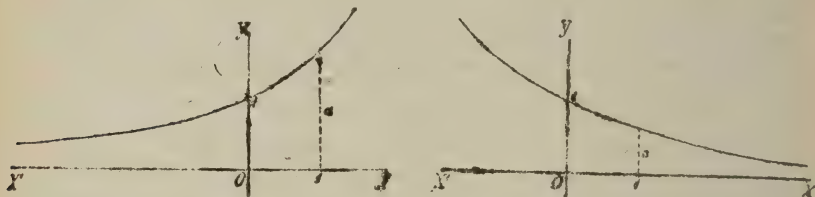
In particolare le funzioni $f(x)$, $-f(x)$ variano sempre in senso contrario.

17. Esempii di funzioni crescenti. 1.° *La funzione* $y = ax + b$ *è sempre crescente se* $a > 0$, *sempre decrescente se* $a < 0$, *in tutto l'intervallo* $(-\infty, +\infty)$.

La rappresentazione geometrica di questa funzione è, come sappiamo, una linea retta (cfr. Cap. VI), che, per $a > 0$ è inclinata al-

l'asse delle x come nella figura a sinistra, e per $a < 0$ è inclinata come nella figura a destra.

2.° *La funzione esponenziale* a^x *è sempre crescente se* $a > 1$, *ed è sempre decrescente se* $a < 1$, *per qualunque valore di* x.

Questo teorema è conseguenza di quelli dimostrati nel Capi-

tolo V (**38**, 1° e 2°). Se $\alpha > 1$ la curva che rappresenta la funzione è quella disegnata a sinistra; essa tende ad essere 0 per $x = -\infty$, cresce continuamente fino ad 1 quando x varia da $-\infty$ a 0, e cresce da 1 all'∞ quando x varia da 0 a $+\infty$.

Se $\alpha < 1$ la curva ha un andamento inverso a quello descritto e precisamente quello rappresentato dalla figura a destra.

18. *Se* f(x) *è una funzione che non si annulla nell'intervallo* (a, b) *e conserva sempre lo stesso segno, la funzione* $\frac{1}{f(x)}$ *varia nel verso contrario ad* f(x) *in questo intervallo.*

Infatti, se per fissare le idee la funzione $f(x)$ è crescente in quello intervallo, essendo

$$\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_1)\,f(x_2)},$$

e il denominatore del secondo membro essendo positivo, la differenza $\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)}$ ha il segno di $x_2 - x_1$, e quindi la funzione $\frac{1}{f(x)}$ è decrescente.

19. Esempi di derivate.

1.° Se $y =$ costante $= k$, si ha $y' = \lim\limits_{x_1 = x_2} \frac{k - k}{x_1 - x_2} = 0$, perché il numeratore della frazione è sempre zero; quindi:

La derivata di una costante è zero.

2.° Se $y = x$, si ha $\lim\limits_{x_1 = x_2} \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1$, perché i due termini

della frazione sono sempre eguali fra loro; quindi:

La derivata della variabile indipendente è 1.

3.° Se $y = x^n$, per n intero positivo,

$$\lim_{x_1=x_2} \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = \lim_{x_1=x_2} \frac{(x_1 - x_2)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_2 + \cdots + x_2^{n-1})}{x_1 - x_2}$$

$$= \lim (x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_2 + \cdots + x_2^{n-1}) = n x^{n-1} ;$$

quindi $y' = n x^{n-1}$, cioé:

La derivata di una potenza x^n con esponente intero e positivo è eguale ad $n x^{n-1}$ *).

4.° Se $f(x) = A + B + C$, essendo A, B, C funzioni di x, si ha

$$\lim_{x_1=x_2} \frac{(A_1 + B_1 + C_1) - (A_2 + B_2 + C_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= \lim_{x_1=x_2} \frac{A_1 - A_2}{x_1 - x_2} + \lim_{x_1=x_2} \frac{B_1 - B_2}{x_1 - x_2} + \lim_{x_1=x_2} \frac{C_1 - C_2}{x_1 - x_2}$$

e quindi $f'(x) = A' + B' + C'$, cioé:

La derivata di una somma di funzioni è eguale alla somma delle derivate delle singole funzioni.

5.° Se $f(x) = A \cdot B$, si ha

$$f'(x) = \lim_{x_1=x_2} \frac{A_1 B_1 - A_2 B_2}{x_1 - x_2} = \lim_{x_1=x_2} \frac{A_1 B_1 - A_2 B_1 + A_2 B_1 - A_2 B_2}{x_1 - x_2}$$

$$= \lim_{x_1=x_2} \frac{(A_1 - A_2) B_1}{x_1 - x_2} + \lim_{x_1=x_2} \frac{A_2 (B_1 - B_2)}{x_1 - x_2} = A'B + AB' .$$

Ed analogamente, se $f(x) = A \cdot B \cdot C \cdots$, posto $f(x) = A \cdot (B \cdot C \cdots)$, si ha

$$f'(x) = A'(B \cdot C \cdot \ldots) + A (B \cdot C \cdot \ldots)'$$
$$= A' \cdot B \cdot C \cdot \ldots + A \cdot B' \cdot C \cdot \ldots + A \cdot B \cdot C' \cdot \ldots + \ldots$$

La derivata di un prodotto di funzioni è eguale alla somma

*) Si noti però che questo teorema è vero per una potenza con esponente anche non intero e positivo, ma di ciò si vedrà più opportunamente nel Calcolo infinitesimale.

dei prodotti della derivata di ogni fattore per i rimanenti fattori.

In particolare, se $y = kA$, $y' = kA'$.

6.° Se $f(x) = \frac{1}{x^n}$, si ha (per n intero positivo)

$$f'(x) = \lim_{x_1 = x_2} \frac{\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x_2^n}}{x_1 - x_2} = - \lim_{x_1 = x_2} \frac{(x_1^n - x_2^n)}{x_1^n x_2^n (x_1 - x_2)} =$$

$$= - \lim_{x_1 = x_2} \frac{(x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_2 + \cdots + x_2^{n-1})}{x_1^n x_2^n} = - \frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = - \frac{n}{x^{n+1}} .$$

La derivata di $\frac{1}{x^n}$ è eguale a $- \frac{n}{x^{n+1}}$.

7.° Se $y = \frac{A}{B}$ si ha

$$\lim_{x_1 = x_2} \frac{\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2}}{x_1 - x_2} = \lim_{x_1 = x_2} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{(x_1 - x_2) B_1 B_2} = \lim_{x_1 = x_2} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_2 - A_2 B_1 + A_2 B_2}{(x_1 - x_2) B_1 B_2}$$

$$= \lim_{x_1 = x_2} \frac{\frac{A_1 - A_2}{x_1 - x_2} B_2 - \frac{B_1 - B_2}{x_1 - x_2} A_2}{B_1 B_2}$$

e quindi *la derivata* di un quoziente di due funzioni $\frac{A}{B}$ è

$$y' = \frac{A'B - AB'}{B^2} .$$

8.° Se $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, si ha

$$y' = \lim_{x_1 = x_2} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \lim_{x_1 = x_2} \frac{f(u_1) - f(u_2)}{x_1 - x_2} = \lim_{x_1 = x_2} \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} \cdot \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2}$$

e quindi

$$y' = f'(u) \varphi'(x) .$$

Cioé: *la derivata* di una funzione di altra funzione è eguale al prodotto della derivata della prima per la derivata della seconda.

9.° Se $y = \operatorname{sen} x$, si ha

$$\lim_{x_1 = x_2} \frac{\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2}{x_1 - x_2} = \lim_{x_1 = x_2} \frac{2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \operatorname{sen} \frac{x_1 - x_2}{2}}{x_1 - x_2}$$

$$= \lim_{x_1 = x_2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \lim_{x_1 = x_2} \frac{\operatorname{sen} \frac{x_2 - x_3}{2}}{\frac{x_1 - x_2}{2}} = \cos x$$

e quindi
$$y' = \cos x \ .$$

Cioé: *la derivata* di $\operatorname{sen} x$ è $\cos x$.

10. Se $f(x) = x^p (a - x)^q$, applicando le regole derivanti dal 5° dal 3°, dall'8°, e dal 1° esempio, si ha

$$f'(x) = p x^{p-1} (a - x)^q + q x^p (a - x)^{q-1} (a - x)'$$

$$= p x^{p-1} (a - x)^q - q x^p (a - x)^{q-1} \ .$$

11.° Se $y = \sqrt[n]{x}$ si ha

$$y' = \lim \frac{\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x_2}}{x_1 - x_2} \ .$$

Si ponga $\sqrt[n]{x_1} = a \, , \sqrt[n]{x_2} = b$ e si ha

$$y' = \lim_{a=b} \frac{a - b}{a^n - b^n} = \lim_{a=b} \frac{1}{a^{n-1} + a^{n-2} b + \ldots + b^{n-1}} = \frac{1}{n a^{n-1}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

La derivata di $\sqrt[n]{x}$ di indice n è una frazione di numeratore 1 che ha per denominatore $n \sqrt[n]{x^{n-1}}$.

12.° Tenendo presente l'esempio 8° si può generalmente trovare la derivata di radice n^{esima} di una qualunque funzione u di x; cioè se $y = \sqrt[n]{u}$, si ha

$$y' = \left(\sqrt[n]{u}\right)' \cdot u' = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}} \ .$$

13.° Se $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$, si ha

$$y' = \frac{a(a'x + b') - a'(ax + b)}{(a'x + b')^2} = \frac{ab' - a'b}{(a'x + b')^2} .$$

In particolare per $y = \frac{1}{x}$, la derivata è $y' = -\frac{1}{x^2}$.

20. FORME DETTE INDETERMINATE.

Da diversi esempi si è visto che le funzioni si possono presentare sotto forme, che non hanno significato, mentre a destra e a sinistra di quel dato valore della variabile possono avere un limite determinato. Queste forme sono dette comunemente forme indeterminate e sono le seguenti :

$$\frac{0}{0} , \frac{\infty}{\infty} , \infty \cdot 0 , \infty - \infty , 0^0 , \infty^0 , 1^\infty .$$

È utile osservare fin da ora che queste forme sono riducibili alle prime due e per molti casi alla prima soltanto.

Difatti in molti casi, se per $x = a$ la funzione $\frac{f(x)}{F(x)}$ si presenta sotto la forma $\frac{\infty}{\infty}$, conviene trasformarla in $\frac{1}{F(x)} \Big/ \frac{1}{f(x)}$ e si ritorna alla forma $\frac{0}{0}$.

Se per $x = a$ il prodotto $f(x) \cdot F(x)$ si presenta sotto la forma $0 \cdot \infty$, si può trasformarlo nel quoziente $f(x) \Big/ \frac{1}{F(x)}$ e si ritrova l'espressione $\frac{0}{0}$, oppure si può trasformarlo in $F(x) \Big/ \frac{1}{f(x)}$ e si ritrova l'espressione $\frac{\infty}{\infty}$.

Se la differenza $f(x) - F(x)$ per $x = a$ prende la forma $\infty - \infty$, si può trasformarla nel prodotto $f(x) \left[1 - \frac{F(x)}{f(x)} \right]$; e questo, se la differenza in parentesi è diversa da zero, risulta eguale a $\pm \infty$, ed invece, se $\frac{F(x)}{f(x)} = 1$, la data differenza è ricondotta al caso precedente, e quindi si può trasformare in altra che si presenti sotto la forma $\frac{0}{0}$.

Ed infine, se per $x=a$ la potenza $f(x)^{F(x)}$ prende una delle forme $0^0, \infty^0, 1^\infty$, si cercherà il limite del logaritmo della funzione proposta per $x=a$, cioè:

$$\lim_{x=a} \left\{ F(x) \log f(x) \right\},$$

il quale prende rispettivamente una delle forme $0 \cdot (-\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, e si è ricondotti sempre al primo o al secondo caso. Trovato il limite del logaritmo dell'espressione data resta determinato il limite dell'espressione stessa.

Però di questi tre ultimi casi non ci occuperemo in questo libro.

Quando una funzione algebrica in x assume per $x=a$ una di queste espressioni prive di significato, ed esiste il limite verso cui tende la funzione quando x tende ad a, questo limite si assume di solito per valore della funzione per $x=a$. Allorquando per $x=a$, il limite non esiste, è in nostro arbitrio di assegnare alla funzione un valore qualunque per $x=a$.

21. FUNZIONI CHE PRENDONO LA FORMA $\dfrac{0}{0}$.

Quando l'espressione, che per $x=a$ prende la forma $\dfrac{0}{0}$, è una frazione $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ che ha per termini due funzioni algebriche razionali intere in x, vuol dire che ambo i termini della frazione, annullandosi per $x=a$, sono divisibili per $x-a$; quindi, calcolando (colla regola di Ruffini o direttamente) i quozienti $f_1(x)$ ed $F_1(x)$ delle divisioni di ambo i termini per $x-a$, si può scrivere per valori di $x \mp a$

$$y=\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)F_1(x)}=\frac{f_1(x)}{F_1(x)},$$

e perciò passando al limite si ha tanto a destra che a sinistra di a

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} \frac{f_1(x)}{F_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x=a} f_1(x)}{\lim\limits_{x=a} F_1(x)}$$

qualora sia $\lim_{x=a} F_1(x)$ diverso da zero. Nel qual caso, essendo continue le funzioni f e F, e quindi continua anche la funzione $f(x)/F(x)$, si può scrivere

$$\lim_{x=a} y = \frac{f_1(x)}{F_1(x)} .$$

Se però $\lim_{x=a} F_1(x) = 0$, ed anche $\lim_{x=a} f_1(x) = 0$, si ritorna di nuovo alla questione medesima che si voleva risolvere, ed allora applicando la divisione per $(x - a)$ tante volte quante sarà necessario, si arriverà a trovare il valore di $\lim y$ per $x = a$.

Tutto si riduce in sostanza a sopprimere fra il numeratore e il denominatore i fattori comuni che si annullano per $x = a$, e porre in seguito nella frazione risultante $x = a$.

22. ESEMPII. 1.° Si consideri la frazione

$$y = \frac{3(x^2 - 4)}{x(x - 2)} ;$$

essa per $x = 2$ prende la forma $\frac{0}{0}$, ma decomponendo in fattori primi il numeratore, si ha:

$$y = \frac{3(x + 2)(x - 2)}{x(x - 2)} ,$$

e nell'ipotesi di $x \neq 2$ sopprimendo il fattore $x - 2$ ai due termini, si ha

$$\lim_{x=2} y = \lim_{x=2} \frac{3(x + 2)}{x} = 6 ,$$

e da ciò risulta che la funzione nell'intorno del punto 2 ha per limite 6, e quindi, se ad essa si assegna il valore 6 in quel punto, essa è continua nel punto 2.

2.° 3.° 4.° Con questo criterio si possono trovare i valori che assumono per $x = 1$ le seguenti funzioni:

$$\frac{3x^2 - 3}{2x - 2} ; \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 3} ; \quad \frac{3x^3 - 3}{x^2 - 2x + 1} .$$

Si ha infatti per $x = 1$

$$\frac{3x^2 - 3}{2x - 2} = \frac{3(x+1)(x-1)}{2(x-1)} = \frac{3(x+1)}{2} ,$$

quindi

$$\lim_{x=1} \frac{3x^2 - 3}{2x - 2} = \lim_{x=1} \frac{3(x+1)}{2} = 3 ,$$

e risulta che la funzione è continua nel punto 1.

Ed analogamente

$$\lim_{x=1} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 - 3} = \lim_{x=1} \frac{(x-1)^2}{3(x+1)(x-1)} = \lim_{x=1} \frac{x-1}{3(x+1)} = 0 ,$$

da cui risulta che la funzione è continua nel punto 1;

$$\lim_{x=1} \frac{3x^3 - 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x=1} \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x=1} \frac{3(x^2+x+1)}{x-1} = \pm\infty ,$$

da cui risulta che la funzione è discontinua di 2ª specie nel punto 1 e che il punto 1 è un *polo* della funzione.

5.° Egualmente il valore del limite che assume per $x = 4$ la funzione

$$\frac{5x^2 + 35x - 220}{x^2 - 11x + 28} = \lim_{x=4} \frac{5(x+11)(x-5)}{(x-7)(x-4)} = \lim_{x=4} \frac{5(x+11)}{x-7} = -25 ,$$

e quindi risulta che essa è continua pel punto 4.

6.° *Determinare il valore della funzione*

$$y = \frac{x^4 - 11x^3 + 45x^2 - 81x + 54}{x^5 - 10x^4 + 37x^3 - 63x^2 + 54x - 27}$$

per $x = 3$.

Siccome la frazione assume per $x = 3$ la forma $\frac{0}{0}$, applichiamo la regola di Ruffini, per vedere quante volte è contenuto in ciascuno dei termini della frazione il fattore $x - 3$, e si trova

$$y = \frac{(x-3)^3 (x-2)}{(x-3)^3 (x^2 - x + 1)} ,$$

quindi
$$\lim_{x=3} y = \lim_{x=3} \frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{7},$$

e risulta che la funzione è continua nel punto 3.

23. Si possono ricondurre al caso precedente altre frazioni i cui termini siano frazionarii, eseguendo prima le operazioni accennate, oppure altre frazioni che abbiano per termini dei monomii irrazionali.

Così per determinare il valore dell'espressione

$$y = \frac{x - \frac{1}{x}}{3x - \frac{x+5}{x+1}},$$

che per $x = 1$ diviene della forma $\frac{0}{0}$, si eseguono le operazioni accennate e si ha

$$y = \frac{x^2-1}{3x^2+2x-5} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)^2}{(3x+5)(x-1)x}$$

e perciò

$$\lim_{x=1} y = \lim_{x=1} \frac{(x+1)^2}{(3x+5)x} = \frac{1}{2}.$$

Per determinare il valore che prende la funzione $y = \frac{(x-a)^{\frac{1}{3}}}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}}$ per $x = a$ si osservi che

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} \frac{(x-a)^{\frac{1}{3}}}{(x-a)^{\frac{1}{3}}(x+a)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x=a} \frac{1}{(x+a)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{(2a)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2a}}.$$

24. In generale si può osservare che allorquando si cerca di $y = \frac{f(x)}{F(x)}$ il limite per $x=a$, e che $f(a)=0, F(a)=0$, si può scrivere
$$y = \frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}$$

e quindi

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}}$$

e se le funzioni sono entrambe continue in $x=a$,

$$\lim_{x=a} y = \frac{f'(a)}{F'(a)} .$$

Si ha quindi la seguente regola facilissima per trovare il limite del rapporto di due funzioni continue che in un punto assumono la forma insignificante $\frac{0}{0}$.

Il limite del rapporto di due funzioni continue che nel punto a *prende la forma* $\frac{0}{0}$ *è eguale al rapporto dei valori che in quel punto assumono le derivate delle due funzioni* (Teorema di L'Hospital).

Applicando questa regola agli esempii trattati nel n. **48** si avrebbe rispettivamente:

$$y = \lim_{x=2} \frac{6x}{2x-2} = 6 \; ; \quad y = \lim_{x=1} \frac{6x}{2} = 3 \; ; \quad y = \lim_{x=1} \frac{2x-2}{6x} = 0 \; ;$$

$$y = \lim_{x=1} \frac{9x}{2x-2} = \infty \; ; \quad y = \lim_{x=4} \frac{10x+35}{2x-11} = -25 \; ;$$

$$y = \lim_{x=3} \frac{4x^3-33x^2+90x-81}{5x^4-40x^3+111x^2-126x+54}$$

$$= \lim_{x=3} \frac{12x^2-66x+90}{20x^3-120x^2+222x-126}$$

$$= \lim_{x=3} \frac{24x-66}{60x^2-240x+222} = \lim_{x=3} \frac{4x-11}{10x^2-40x+37} = \frac{1}{7} .$$

25. 1.° Applichiamo la regola a trovare il limite per $x=a$ della funzione

$$y = \frac{\sqrt[n]{P_x} - \sqrt[n]{P_a}}{x-a} ,$$

nell'ipotesi che P_x sia una funzione che diventi $= P_a$ per $x = a$. Col metodo diretto moltiplicando ambo i termini per $P_x - P_a$, si avrà

$$y = \frac{\sqrt[n]{P_x} - \sqrt[n]{P_a}}{P_x - P_a} \cdot \frac{P_x - P_a}{x - a},$$

e se $P_x - P_a = (x - a) Q_x$, si avrà

$$\lim_{x=a} y = \lim \frac{\sqrt[n]{P_x} - \sqrt[n]{P_a}}{P_x - P_a} \cdot \lim \frac{P_x - P_a}{x - a} = \frac{1}{n \sqrt[n]{P_a^{n-1}}} \cdot Q_a = \frac{Q_a}{n \sqrt[n]{P_a^{n-1}}},$$

osservando che $Q_a = \lim \frac{P_x - P_a}{x - a}$ e che perciò è $= P'_a$.

Invece applicando la regola suddetta si ha subito

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} \frac{P'_x}{n \sqrt[n]{P_x^{n-1}}} = \frac{P'_a}{n \sqrt[n]{P_a^{n-1}}}.$$

2.° Sia la funzione

$$y = \frac{\sqrt[m]{P_x} + \sqrt[n]{Q_x} - R_x}{M_x - \sqrt[p]{N_x}},$$

per la quale supponiamo che per $x = a$ si abbia

$$\sqrt[m]{P_a} + \sqrt[n]{Q_a} - R_a = 0 \quad , \quad M_a - \sqrt[p]{N_a} = 0$$

Applicando la regola suddetta si avrebbe immediatamente

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} \frac{(\sqrt[m]{P_x})' + (\sqrt[n]{Q_x})' - R'_x}{(M_x)' - (\sqrt[p]{N_x})'}.$$

Invece applicando il metodo diretto si avrà identica-

mente

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} \frac{\sqrt[m]{P_x} + \sqrt[n]{Q_a} - R_x - (\sqrt[m]{P_a} + \sqrt[n]{Q_a} - R_a)}{M_x - \sqrt[p]{N_x} - (M_a - \sqrt[p]{N_a})}$$

$$= \lim_{x=a} \frac{(\sqrt[m]{P_x} - \sqrt[m]{P_a}) + (\sqrt[n]{Q_x} - \sqrt[n]{Q_a}) - (R_x - R_a)}{(M_x - M_a) - (\sqrt[p]{N_x} - \sqrt[p]{N_a})};$$

e poiché ognuna delle parentesi si annulla per $x = a$, dividiamo numeratore e denominatore per $x - a$, e si ha

$$\lim_{x=a} y = \lim_{x=a} \frac{\frac{\sqrt[m]{P_x} - \sqrt[m]{P_a}}{x-a} + \frac{\sqrt[n]{Q_x} - \sqrt[n]{Q_a}}{x-a} - \frac{R_x - R_a}{x-a}}{\frac{M_x - M_a}{x-a} - \frac{\sqrt[p]{N_x} - \sqrt[p]{N_a}}{x-a}} =$$

$$\lim_{x=a} = \frac{(\sqrt[m]{P_x})' + (\sqrt[n]{Q_x})' - (R_x)'}{(M_x)' - (\sqrt[p]{N_x})'}.$$

26. Esempii. 1.° *Trovare, per $x = -a$, il limite dell'espressione*

$$y = \frac{\sqrt{3x^2 - 2a^2} + x}{x + a}.$$

Applicando il metodo diretto, liberando dall'irrazionale il numeratore, si ha (per $x \neq -a$)

$$\frac{\sqrt{3x^2 - 2a^2} + x}{x + a} = \frac{3x^2 - 2a^2 - x^2}{(\sqrt{3x^2 - 2a^2} - x)(x + a)}$$

$$= \frac{2(x^2 - a^2)}{(\sqrt{3x^2 - 2a^2} - x)(x + a)} = \frac{2(x - a)}{\sqrt{3x^2 - 2a^2} - x}$$

e quindi $$\lim_{x=-a} y = \frac{-4a}{2a} = -2.$$

Applicando la 2.ª regola si ha

$$\lim_{x=-a} y = \lim_{x=-a} \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 2a^2}} + 1 = -3 + 1 = -2 .$$

2.° *Trovare il limite della funzione* $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 2} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$ *per* $x = 2$.

Moltiplicando ambo i termini della frazione per $(x^2 - 2) - 2$ si ha (per $x \neq 2$)

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2} - \sqrt[3]{3}}{(x^2 - 2) - 2} \cdot \frac{(x^2 - 2) - 2}{x - 2} = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2} - \sqrt[3]{2}}{(x^2 - 2) - 2} \cdot (x + 2) ,$$

e quindi

$$\lim_{x=2} y = \lim_{x=2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 2} - \sqrt[3]{2}}{(x^2 - 2) - 2} \cdot 4 = \frac{4}{3\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3} .$$

Applicando invece la 2ª regola si ha

$$\lim_{x=2} y = \lim_{x=2} \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 2)^2}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{2^2}} .$$

3.° *Trovare il limite della funzione* $y = \dfrac{\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt[4]{x^2 + 7}}{\sqrt[3]{14x^2 - 1} - \sqrt{x^3 - 2}}$

per $x = 3$.

Applicando la regola di L'Hospital, si ha

$$\lim_{x=3} y = \lim_{x=3} \frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}} - \dfrac{2x}{4\sqrt[4]{(x^2+7)^3}}}{\dfrac{28x}{3\sqrt[3]{(14x^2-1)^2}} - \dfrac{3x^2}{2\sqrt{(x^2-2)^2}}} = \frac{\dfrac{1}{12} - \dfrac{6}{32}}{\dfrac{84}{79} - \dfrac{27}{10}} = \frac{-\dfrac{5}{48}}{-\dfrac{79}{50}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 25}{24 \cdot 75} = \frac{125}{1896} .$$

27. a) Non si opera diversamente per le frazioni che contengono funzioni trigonometriche nei loro termini.

Così si userà qualche volta il concetto della scomposizione dei termini della frazione in fattori per sopprimere dei fattori comuni, oppure per ridursi a limiti conosciuti.

Così volendo sapere qual'è il limite della funzione

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

per $h=0$ si scriverà

$$\lim_{h=0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h=0}\frac{-2\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=$$

$$=-\lim_{h=0}\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\operatorname{sen}x\ .$$

Ciò conduce a conchiudere che la derivata di $\cos x$ è $-\operatorname{sen}x$.

b) In altri casi, invece di sopprimere i fattori comuni ai due termini della frazione, occorrerà di moltiplicare ambo i termini per un fattore adatto, come si vede negli esempi seguenti:

1.° Si voglia $\lim\limits_{x=0}\frac{x}{\operatorname{tg}x}$; si dirà

$$\lim\frac{x}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x=0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x\right)=\lim_{x=0}\frac{x}{\operatorname{sen}x}\cdot\lim_{x=0}\cos x=1\ .$$

2.° Si voglia il limite che per $x=0$ assume la funzione $\frac{\operatorname{tg}ax}{\operatorname{tg}x}$; si dividerà numeratore e denominatore per ax e si avrà

$$\lim_{x=0}\frac{\operatorname{tg}ax}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x=0}\left(a\,\frac{\operatorname{tg}ax}{ax}:\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)=\lim_{x=0}a\,\frac{\operatorname{tg}ax}{ax}:\lim_{x=0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=a\ .$$

3.° Si voglia $\lim\limits_{x=0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen}x}$; moltiplicando per $\cos x+1$ ambo i termini della frazione si ha che esso

$$=\lim_{x=0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{\operatorname{sen}x(\cos x+1)}=\lim_{x=0}\frac{\cos^2 x-1}{\operatorname{sen}x(\cos x+1)}=\lim\frac{-\operatorname{sen}x}{\cos x+1}=0.$$

28. Funzioni che prendono la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Il limite per $x = \infty$ *di una funzione razionale frazionaria*

$$y = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots + b_p} \qquad (\text{per } a_0, b_0 \neq 0)$$

è ∞ *se* $m > p$, *è* 0 *se* $m < p$ *ed è* $= \frac{a_0}{b_0}$ *se* $m = p$.

Infatti, la funzione data si può scrivere

$$y = \frac{x^m}{x^p} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_p}{x^p}}$$

e quindi passando al limite per $x = \infty$, ed osservando che il limite a cui tende il secondo fattore del secondo membro è $\frac{a_0}{b_0}$, si ha

$$\lim_{x=\infty} y = \lim_{x=\infty} \frac{x^m}{x^p} \cdot \frac{a_0}{b_0}.$$

Se m è maggiore di p, $\frac{x^m}{x^p} = x^{m-p}$ e tende all'∞, per $x = \infty$.

Se m è minore di p, $\frac{x^m}{x^p} = \frac{1}{x^{p-m}}$ e tende a 0, per $x = \infty$.

Se $m = p$, $\frac{x^m}{x^p} = 1$ qualunque sia x. Dunque il teorema resta con ciò dimostrato.

Per valori di x sufficientemente grandi in valore assoluto la y serba il segno di $\frac{a_0 x^m}{b_0 x^p}$, e questo segno è quello di $\frac{a_0}{b_0}$ se m e p sono entrambi pari o entrambi dispari, ed è invece quello di $\frac{a_0}{b_0} x$ se m e p sono l'uno pari e l'altro dispari.

Praticamente basterà dividere ambo i termini della frazione per la potenza di x eguale al grado del termine della frazione di grado minore e poi supporre $x = \infty$.

29. Esempii.

1.⁰ $$\lim_{x=\infty} \frac{3x^2+7x+2}{x-4} = \lim_{x=\infty} 3x = \infty \,.$$

2.⁰ $$\lim_{x=\infty} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-7} = \frac{1}{2} \,.$$

3.⁰ $$\lim_{x+\infty} \frac{2x^2-3}{3x^3+5} = \lim_{x=\infty} \frac{2}{3x} = 0 \,.$$

30. Lo stesso metodo si può applicare anche alle funzioni fratte irrazionali.

Esempii. 1.⁰ *Calcolare per* x = ∞ *il valore di*

$$y = \frac{\sqrt[4]{3x^4+8x^3+2} + \sqrt[4]{2x^3}}{4x+\sqrt{2x^3+7}} \,.$$

Il grado del numeratore per rispetto ad x è 1, quello del denominatore è $^3/_2$, perciò (nell'ipotesi di $x \pm \infty$) dividiamo ambo i termini della frazione per x, e si ha

$$y = \frac{\sqrt[4]{3+8/x+2/x^4} + \sqrt[4]{2/x}}{4+\sqrt{2x+7/x^2}} \,,$$

e quindi

$$\lim_{x=\infty} y = \lim_{x=\infty} \frac{\sqrt[4]{3}}{4+\sqrt{2x}} = 0 \,.$$

2.⁰ *Trovare per* x = — ∞ *il valore di*

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^3+5} + \sqrt[3]{2x^3+7}}{\sqrt[4]{3x^3-1}} \,.$$

Il grado del numeratore è 1, quello del denominatore è $\frac{3}{4}$, quindi (nell' ipotesi di $x \pm \infty$) dividiamo ambo i termini della

frazione per $x^{3/4}$, e si ha

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^{3/4} + 5/x^{9/4}} + \sqrt[3]{2x^{3/4} + 7/x^{9/4}}}{\sqrt[4]{3 - 1/x^3}},$$

e quindi

$$\lim_{x=\infty} y = \frac{\sqrt[3]{\lim_{x=\infty} x^{3/4}} + \sqrt[3]{\lim_{x=\infty} 2x^{3/4}}}{\sqrt[4]{3}} = \infty .$$

31. Quando la funzione fratta ha per termini delle funzioni trigonometriche può essere utile di ricorrere a trasformare la forma $\frac{\infty}{\infty}$ in altra della forma $\frac{0}{0}$; oppure qualche volta basterà moltiplicare ambo i termini della frazione per un fattore opportunamente scelto per trovare il valore cercato. Per questi casi saranno sufficienti i seguenti

ESEMPII. 1.° Sia da cercare il $\lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{cotg} x}$: trasformiamo la funzione in $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ e si ha che il limite cercato $= 1$.

2.° Si voglia $\lim_{x=\infty} \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x}$: applicando la trasformazione suddetta si ha

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x=0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} : \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right) = 1 .$$

3.° *Trovare il valore di* $y = \frac{1 - \cot x}{2 + \operatorname{cosec} x}$ *per* $x = +0$.

Si moltiplichi numeratore e denominatore per $\operatorname{sen} x$ e si ha

$$y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2 \operatorname{sen} x + 1}$$

e quindi

$$\lim_{x=+0} y = \frac{-1}{+1} = -1 .$$

32. Funzioni che prendono la forma $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$.
Abbiamo già visto al n. **20** come queste funzioni si riconducono alla forma $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$; qualche volta per determinare il valore della funzione basta eseguire le operazioni indicate.

Esempii. 1.° Calcolare il valore, per $x = 1$, di

$$y = \frac{x}{x-1}\left(1 - \frac{x+1}{2}\right).$$

Per $x = 1$, la funzione assume la forma $\infty \cdot 0$; ma eseguendo la sottrazione indicata si ha

$$y = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1-x}{2} = -\frac{x}{2}, \quad \text{quindi} \quad \lim_{x=1} y = -\frac{1}{2}.$$

2.° Si voglia $\lim\limits_{x=0}(x \operatorname{cosec} x)$. Questa funzione per $x = 0$ diventa $0 \cdot \infty$, applicando quindi la trasformazione si ha

$$\lim_{x=0}(x \operatorname{cosec} x) = \lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

3.° Si voglia $\lim\limits_{x=\pi/2} \operatorname{tang} x (1 - \operatorname{sen} x)$. Questa formola per $x = \frac{\pi}{2}$ prende la forma $\infty \cdot 0$; trasformandola si ha:

$$\lim_{x=\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cot x} = \lim_{x=\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} \operatorname{sen} x = \lim_{x=\pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

e moltiplicando ambo i termini per $1 + \operatorname{sen} x$ risulta

$$= \lim_{x=\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos x(\operatorname{sen} x + 1)} = \lim_{x=\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 1} = 0.$$

4.° Si voglia $\lim\limits_{x=0}(\operatorname{cotg} x - \operatorname{cosec} x)$. Questa funzione per $x = 0$ diviene della forma $\infty - \infty$; mettiamo in vista $\operatorname{cosec} x$ e si ha

---

Avvertenza. A p. 244, innanzi al n. **20** si ponga il titolo: § 3. **Forme indeterminate.**

che essa è

$$= \lim_{x=0} \operatorname{cosec} x (\cos x - 1) = \lim_{x=0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x},$$

e per l'es. 3.° del n. **27**, **b**, essa $= 0$.

5.° Egualmente si può dimostrare che:

$$\lim_{x=\pi/_2} (\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x) = 0 .$$

Infatti,

$$\lim_{x=\pi/_2} (\operatorname{tg} x - \sec x) = \lim_{x=\pi/_2} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x}$$

e quindi, per l'es. 3°, $= 0$.

33. Qualche volta invece di trasformare la funzione che si presenta sotto la forma $\infty - \infty$; in altra della forma $\infty \cdot 0$, col porre a fattore una delle due funzioni, sarà più utile moltiplicare e dividere la funzione per la somma delle stesse funzioni.

Così p. es., si può facilmente dimostrare che:

$$\lim_{x=\infty} \left(x - \sqrt{(x-a)(x-b)}\right) = \frac{1}{2}(a+b) .$$

Infatti,

$$\lim_{x=\infty} \left(x - \sqrt{(x-a)(x-b)}\right) = \lim_{x=\infty} \frac{(a+b)x - ab}{x + \sqrt{(x-a)(x-b)}} =$$

$$= \lim_{x=\infty} \frac{a + b - \frac{ab}{x}}{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{a}{x}\right)\left(1 - \frac{b}{x}\right)}} = \frac{a+b}{2} .$$

34. In generale se la funzione è della forma

$$y = \sqrt{P_x} - \sqrt{Q_x} ,$$

dove P_x e Q_x sono due polinomii in x, e questa prende la forma $\infty - \infty$ per $x = \infty$, moltiplicandola e dividendola per $\sqrt{P_x} + \sqrt{Q_x}$ si ottiene

$$y = \frac{P_x - Q_x}{\sqrt{P_x} + \sqrt{Q_x}} ,$$

e qualora P_x e Q_x siano due polinomii la cui differenza non risulti indipendente da x, si è ridotti alla determinazione del valore della funzione del tipo considerato nel n. **30**.

ESEMPIO. *Trovare per* $x = \infty$ *il valore della funzione*

$$y = \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x^2-5}}{\sqrt[4]{x^2+7}} .$$

Questa funzione per $x = \infty$ prende la forma $\frac{\infty - \infty}{\infty}$, né si potrà con utilità applicare il criterio dato nel n. **28.**

Moltiplicando invece numeratore e denominatore per

$$\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x^2-5}$$

si ha

$$y = \frac{x^2+3-2x^2+5}{\sqrt[4]{x^3+7}\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}\right)} = \frac{-x^2+8}{\sqrt[4]{x^3+7}\left(\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x^2-5}\right)}$$

e quindi dividendo per $x^{7/4}$ si ha

$$y = \frac{-x^{1/4} + 8/x^{7/4}}{\sqrt[4]{1+7/x^3}\left(\sqrt{1+3/x^2}+\sqrt{2-5/x^2}\right)}$$

e per $x = \infty$

$$\lim_{x=\infty} y = -\infty .$$

35. Come si è visto l'artifizio consiste a considerare la funzione come fratta, anche se non lo fosse, ed a renderne razionale il suo numeratore. In modo analogo si opererebbe anche se la funzione y fosse differenza di due radicali di indice maggiore di 2, oppure di indici differenti. Come sarebbe

$$y = \sqrt[m]{P_x} - \sqrt[n]{Q_x} .$$

§ 4. — Applicazioni.

36. Moto vario. Velocità. Nel moto di un mobile sopra una determinata linea (traiettoria) lo spazio s da esso percorso, misurato a partire da un punto della linea che si assume come *origine*, è funzione del tempo impiegato a percorrerlo, quindi l'equazione del moto è rappresentata dalla funzione $s = f(t)$.

Si è visto che il moto uniforme è rappresentato da una funzione lineare; in ogni altro caso il moto si dice *vario*, e già si sa che il moto dei gravi è rappresentato dalla funzione $s = \frac{1}{2} gt^2$, ed è *moto uniformemente vario*.

Nel moto vario bisogna definire che cosa s'intende per *velocità* del mobile. Si considerano due elementi della velocità: la *direzione* e la *grandezza*. Si assume per direzione della velocità di un mobile in un dato istante nel moto vario *la direzione della tangente alla traiettoria del mobile nel punto in cui esso si trova nell' istante considerato*. La grandezza della velocità si determina con la seguente considerazione. Sia δt l'incremento del tempo e δs l'incremento dello spazio a partire da una posizione M ad un'altra posizione M' del mobile sulla traiettoria. Se lo spazio MM' fosse stato percorso con moto uniforme la velocità del mobile sarebbe stata $V = \frac{\delta s}{\delta t}$; questa si dice *velocità media* del moto nel tempo δt. Però facendo avvicinare il punto M' al punto M, il rapporto $\frac{\delta s}{\delta t}$ tende ad assumere la forma $\frac{0}{0}$. Se al tendere di δt a zero questo rapporto tende ad un limite determinato questo limite si assume per definizione come valore della *velocità* nel punto M della traiettoria .Indicando questo limite con v, si ha $v = \lim \frac{\delta s}{\delta t}$. Ma questo limite si è chiamato *prima derivata* della funzione s (cfr. n. **12**); dunque conchiudiamo che la *velocità di un mobile in un punto della traietto-*

ria è eguale al valore che assume in quel punto la derivata prima dello spazio rispetto al tempo. Per quanto si è detto sulla rappresentazione della derivata, si deduce che la velocità è rappresentata nel diagramma del moto (*curva degli spazii*) dalla tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente geometrica alla curva degli spazii in quel punto fa con l'asse delle ascisse.

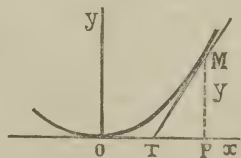
Se il moto è uniformemente vario, $s = \frac{1}{2} gt^2$, quindi $s' = v = gt$, e si dimostra così, quanto affermammo nel n. **27** del cap. VI, che la velocità del moto uniformemente vario è proporzionale al tempo.

37. Tangenti alle curve ax^2, $\frac{a^2}{x}$. La derivata è utile nella costruzione delle curve dei diagrammi, poiché permette di costruire anche la tangente in ogni punto della curva.

Ci limiteremo a dare due esempi che valgano a mettere in chiaro questa utilità, mostrando come si costruisce la tangente in un punto qualunque della parabola $y = ax^2$ e della iperbole equilatera $y = \frac{a^2}{x}$.

Se MT è la tangente nel punto M di una curva ed MP è l'ordinata, dal triangolo rettangolo MPT si ha

$$\text{TP} \cdot \text{tang MTP} = y, \quad \text{e quindi } \text{TP} = \frac{y}{y'}.$$

Il segmento TP si chiama *sottangente* del punto M.

Dall' equazione della parabola $y = ax^2$, si ricava

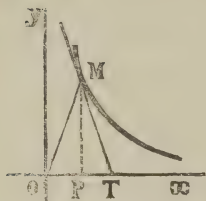
$$y' = 2ax = 2\frac{y}{x}$$

e quindi

$$\text{TP} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{2} x.$$

Si costruisce la tangente della parabola nel punto M

congiungendo il punto M *col punto medio* T *dell' ascissa* OP.

Dall'equazione dell'iperbole equilatera $y = \frac{a^2}{x}$ si ha

$$y' = -\frac{a^2}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

e quindi

$$TP = \frac{y}{y'} = -x.$$

Il suo valore negativo dice che la tangente forma angolo ottuso con l'asse delle ascisse; quindi:

Si costruisce la tangente dell'iperbole equilatera nel punto M *congiungendo il punto* M *col punto* T *simmetrico dell'origine rispetto al punto* P.

Esercizi.

1. Quali sono gl'intervalli nei quali la funzione $x - \sqrt{x^2 - x - 2}$ è definita?

2. Che diventano le radici di $ax^2 + x - a = 0$ quando a tende a zero o ad ∞?

3. Determinare gl'intervalli di continuità della funzione $\frac{2x^2 - 5x - 7}{x^3 + 4x^2 - 5x}$.

— Quale discontinuità presentano le funzioni rappresentate da ciascuna delle radici delle seguenti equazioni in x?

4. $y = 3x^2 - 7x - 1.$

5. $y = x^2 - (p+1)x + p^2.$

6. $3x^2 - 4xy - y^2 = 0.$

7. $3(x+y)^2 - 5x^2 + 2y + 1 = 0.$

— Trovare i seguenti limiti:

8. $\lim\limits_{x=3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$.

9. $\lim\limits_{x=-2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 6}$.

10. $\lim\limits_{x=1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 2x - 3}$

11. $\lim\limits_{x=2} \frac{x^4 - 7x^2 + 8x - 2}{x^2 - 3x + 2}$.

12. $\lim\limits_{x=1/2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{8x^4 + 16x^2 - 19x + 5}$.

13. $\lim\limits_{x=a} \frac{4x^4 + 2ax^3 - 2a^2x^2 - 3a^3x - a^4}{2x^3 + 6ax^2 - 5a^2x - 3a^3}$.

14. $\lim\limits_{x=m} \frac{x^4 + 2mx^3 - 4m^2x^2 - m^3x + 2m^4}{x^4 - 3mx^3 - 12m^2x^2 + 22m^3x - 8m^4}$.

15. $\lim\limits_{x=m} \frac{x^4 + 2mx^3 - 2m^3x - m^3}{x^3 - 3mx^2 + 3m^2x - m^3}$.

16. $\lim\limits_{x=1} \dfrac{3x + \dfrac{1+2x}{1-2x}}{x - \dfrac{2+x}{4-x}}$.

17. $\lim\limits_{x=m} \dfrac{x^4 - m^4}{x - \dfrac{m^2}{x}}$.

18. $\lim\limits_{x=1} \dfrac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$. $\left(\text{R. } \dfrac{n(n+1)}{2}\right)$.

19. $\lim\limits_{x=1} \dfrac{x + x^2 - (n+1)^2x^{n+1} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+2} - n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}$.

$\left(\text{R. } \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$.

20. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{6}{x} - 3}{\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x} + 5}$.

21. $\lim\limits_{x=1} \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}x^n - nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} - (n-2)x^{n-3} - \cdots - 2x - 1}{x-1}$.

22. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.

23. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\sqrt{a^2 - (x+h)^2} - \sqrt{a^2 - x^2}}{h}$.

24. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{(3(x+h)^2+7)[4(x+h)^2+7(x+h)-3]-(3x^2+7)(4x^2+7x-3)}{h}$.

$(\text{R. } 6x(4x^2+7x-3)+(3x^2+7)(8x+7))$.

25. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\dfrac{(x+h)^3}{3(x+h)^2 - a^2} - \dfrac{x^3}{3x^2 - a^2}}{h}$. $\left(\text{R. } \dfrac{3x^2(3x^2 - a^2) - x^3 \cdot 6x}{(3x^2 - a^2)^2}\right)$.

26. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$. $(\text{R. } -\operatorname{sen} x)$.

27. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h}$. $\left(\text{R. } \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$.

28. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\cot(x+h) - \cot x}{h}$. $\left(\text{R. } -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$.

29. $\lim\limits_{x=0} \dfrac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$. $\left(\text{R. } \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\right)$.

30. $\lim\limits_{x=1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5} - \sqrt[3]{8}}{x-1}$.

31. $\lim\limits_{x=1} \dfrac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{3x+1}}{4x - \sqrt[3]{63x+1}}$

32. $\lim_{x=1} \frac{\sqrt[3]{5x+4}-\sqrt[3]{9}}{x-1}$.

33. $\lim_{x=2} \frac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt[4]{x^2+12}}{\sqrt[3]{5x-2}-\sqrt{x+2}}$.

34. $\lim_{x=1} \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{1-x^2}}$.

35. $\lim_{x=1} \frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[5]{20x+12}}{x^2+1+\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{63x+1}}$. R. $\frac{3\sqrt{2}-4}{69}$.

36. $\lim_{x=0} \frac{x^2}{1-\cos x}$. (R. 2).

37. $\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx}$. $\left(\text{R. } \frac{m}{n}\right)$.

38. $\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}$. (R. 2).

39. $\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} x}$. (R. 3).

40. $\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$. $\left(\text{R. } \frac{1}{2}\right)$.

41. $\lim_{x=0} \frac{1-\cos^n x}{x^2}$. $\left(\text{R. } \frac{n}{2}\right)$.

(Cfr. Bassi, l. c., anche per altri analoghi esercizi).

42. $\lim_{x=\infty} \frac{3x^2-7x+5}{4x^2+2x-1}$.

43. $\lim_{x=\infty} \frac{x^5-a^5}{x^3+a^3}$.

44. $\lim_{x=\infty} \frac{7x^5+8x^3+4x-2}{4x^3+5x^2-4}$.

45. $\lim_{x=\infty} \frac{2x^2+3x+4}{5x^3+4x^2-7x}$.

46. $\lim_{x=\infty} \frac{\sqrt[7]{x^8+3x^4+2}+\sqrt[3]{x^4-5x+2}}{\sqrt[5]{x^2-2x+3}+\sqrt[6]{2x^8-5x^4+2}}$.

47. $\lim_{x=\infty} \frac{\sqrt{x^2-8}+7}{\sqrt[3]{2x^3+7x-5}+\sqrt{3x^2-5x+4}}$

48. $\lim_{x=\pm\infty} \frac{2x+3}{5x+\sqrt{x^2-4}}$.

49. $\lim_{x=0} \frac{\sqrt{x^2+ax+a^2}-\sqrt{x^2-ax+a^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ per $a>0$.

50. $\lim_{x=\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+1}-x\right)$.

51. $\lim_{x=\infty} \left(3x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

52. $\lim_{x=\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$.

53. $\lim_{x=2/_3} \left(\frac{3}{3x-2} - \frac{5}{3x^2+x-3}\right)$.

54. $\lim_{x=\infty} \frac{3x^2-2x-1}{3x-2} - \frac{x^2}{x+1}$.

55. $\lim_{x=\infty} \left(\sqrt[3]{x^2-1} - x\right)$.

56. $\lim_{x=\infty} \frac{2x+\cos x}{3x-\operatorname{sen} x}$.

57. $\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$. (Si ponga $\operatorname{sen} x = x - \frac{\theta}{6} x^3$, per $\theta > 1$).

58. $\lim_{x=1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ $\left(\text{R. } \frac{2}{\pi}\right)$.

— Risolvere i seguenti altri esercizi complementari alla teoria dei limiti.

59. Calcolare il limite di $x = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots}}}$ per $a > 0$. Caso particolare per $a = 2$.

(R. Risulta $x = \sqrt{a+x}$, quindi $x = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4a}\right)$).

60. Calcolare il limite di $x = \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \ldots}}}$. Caso particolare per $a = 2$.

61. Calcolare per $n = \infty$ la somma

$$\frac{a}{bq} + \frac{2a}{bq^2} + \frac{3a}{bq^3} + \ldots + \frac{na}{bq^n}. \qquad \text{R. } \frac{a}{b} \cdot \frac{q}{(q-1)^2}.$$

(Cfr. Bassi, op. cit., p. 132).

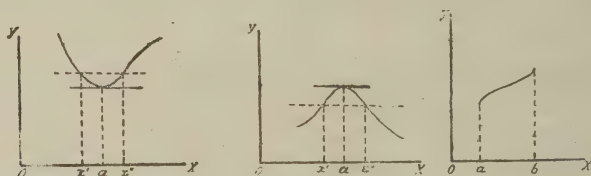
62. I primi due termini di una successione sono a e b e gli altri si formano prendendo sempre la media aritmetica dei due precedenti. Dimostrare che il limite della somma è $\frac{1}{3}(a+2b)$. (Cfr. Cesàro, *Analisi algebrica*, p. 109 e Bassi, l. c., p. 134).

63. I primi due termini di una successione sono a e b, e gli altri si formano prendendo sempre la media geometrica dei due precedenti. Dimostrare che il limite della somma è $\sqrt[3]{ab^2}$.

CAPITOLO OTTAVO.

MASSIMI E MINIMI. DISCUSSIONE DELLE FUNZIONI.

§ 1. — Massimi e minimi.

1. Massimi e minimi. Si dice che per $x = a$ la funzione $f(x)$ passa per un *minimo*, oppure che $f(x)$ *è un minimo* della funzione $f(x)$, quando i valori che $f(x)$ assume nell'intorno di a sono tutti maggiori di $f(a)$. Ne deriva quindi che la funzione $f(x)$ deve essere decrescente a sinistra e crescente a destra di a, come si avvera per la prima a sinistra delle figure qui segnate.

Si dice che per $x = a$ la funzione $f(x)$ passa per un *massimo*, oppure che $f(a)$ *è un massimo* di $f(x)$, quando i valori che $f(x)$ assume nell'intorno di a sono tutti minori di $f(a)$. Ne deriva quindi che la funzione dev'essere crescente a sinistra e decrescente a destra di a, come si vede per la figura intermedia fra quelle sopra segnate. Questi massimi e minimi si dicono pure *massimi e minimi assoluti* per distinguerli dai *massimi e minimi relativi* che si hanno se si considera una funzione sempre crescente in un intervallo (a, b), come è quella rappresentata dalla figura a destra fra quelle sopra segnate.

Intorno ad un minimo assoluto y_0 della funzione $f(x)$, ad ogni valore $y > y_0$ della funzione corrispondono due valori x_1 ed x_2 che fanno assumere alla funzione il valore y; e questi tendono a diventare eguali ad a quando y tende a diventare eguale ad y_0.

Intorno ad un massimo assoluto y_0 della funzione $f(x)$ ad ogni valore $y < y_0$ corrispondono due valori x_1 ed x_2 della variabile x che fanno prendere alla funzione il valore y;

e questi pure tendono a divenire eguali ad a quando y tende ad y_0 *).

2. *Quando una funzione a derivata unica passa per un massimo o per un minimo la sua derivata si annulla.*

Siccome la funzione $f(x)$ cresce o decresce secondo che la derivata $f'(x)$ è positiva o negativa, ne risulta che la funzione non può cessare di decrescere per crescere, o di crescere per decrescere, senza che $f'(x)$ cambi segno, e ciò avviene o quando la derivata si annulla o quando essa è discontinua. Cosicché i valori di x che fanno divenire massima o minima la funzione sono compresi fra quelli che annullano la prima derivata o che la rendono discontinua.

Se però la funzione è a derivata unica, essa deve esser nulla.

Di questa proposizione non è vera la reciproca, perché la derivata può annullarsi per un valore di x che non renda minima o massima la funzione, come si vedrà più innanzi con l'esempio della funzione $y=ax^3+bx^2+cx+d$ nel n. **10.**

3. La ricerca dei valori massimi e minimi che può assumere una funzione ed in generale una grandezza variabile i cui valori dipendono da' valori arbitrarii assegnati ad una o a più variabili indipendenti è stato uno dei problemi che ha più interessati i matematici di tutti i tempi; e sia per risolvere questi problemi, sia per trovare l'area delle curve piane e delle superficie o i volumi dei solidi si è pervenuto alla scoperta della derivata ed alla invenzione del Calcolo infinitesimale, nella quale branca delle Matematiche questi problemi di massimo e minimo han trovato la loro completa risoluzione esente da ogni critica e da ogni eccezione. Pel passato nei limiti delle matematiche elementari invece per risolvere questa categoria di problemi si sono proposti un certo numero di artifizii e di regole e di ripieghi, ognuno dei quali risolve una speciale serie di pro-

*) Le eccezioni che possono presentarsi intorno a quanto qui si afferma non si possono discutere in un libro elementare e per esse si rimandano gli alunni allo studio del Calcolo infinitesimale.

blemi, e tutti obbligano a rendere difficile teoria ed applicazioni, e sopratutto a fare dimostrazioni delicate di esistenze di massimi e minimi quando si ricercano i massimi e minimi di funzioni a più variabili.

Qui adotteremo senz'altro il criterio della derivata che già abbiamo esposto; ma nello stesso tempo a beneficio di quei giovani che trovassero troppo faticoso il concetto delle derivate e la ricerca delle derivate delle funzioni più semplici trattate nel n. **19** del Cap. prec. esporremo pure uno dei primi metodi che furono inventati, che è stato dimenticato, mentre non lo meritava affatto e che ha il vantaggio di applicarsi a tutti i casi, indistintamente, che possono cadere nell'ambito delle matematiche elementari, cioè di quelli che danno luogo ad equazioni riducibili al secondo grado. Senza risalire ai matematici che hanno risoluti degli speciali problemi di massimo o di minimo con procedimenti geometrici o con vedute particolari non manifestate, il primo che abbia data una regola generale per la risoluzione di questi problemi è stato Pierre Fermat, un matematico dilettante *). Egli però dette due regole per risolvere i detti problemi, e di una di esse disse che non gli pareva la migliore **) e si attenne all'altra ***), che includeva la considerazione degli infinitesimi. Quella regola che egli scartava veniva presa in considerazione e messa in onore da Antonio de Monforte ****), un mate-

---

*) Pierre Fermat nacque a Beaumont de Lomagne il 1601 e morì il 1665 a Castres. Egli ha trattato questo metodo in un'opera pubblicata dopo la sua morte intitolata *Méthode pour la recherche du Maximum et du Minimum* (cfr. *Oeuvres* de Fermat, 1891-94, vol. I, p. 133 e vol. III, p. 121).

) Cfr. Opera citata § 5. Egli ne fa applicazione alla questione risoluta col problema 1º del n. **18, all'altra di trovare il massimo di $x^2(a-x)$, al problema del n. **32** e ad altre questioni, e propone di risolvere con esso il problema del n. **39**.

***) Cfr. Opera citata § 1 a 3.

****) Antonio de Monforte dei signori di Laurito (prov. di Salerno) nacque forse in Basilicata il 1644, morì il 1717 a Napoli; egli pubblicò il metodo da lui usato in un' opera molto rara, intitolata *de Problematum determinatione*. Egli l'applica oltre che a' due esempi trattati da Fermat anche al problema di trovare il masssimo di $x^3(a-x)^2$, ed il minimo di $x^3+(a-x)^3$. Per altri più minuti dettagli su quest'opera si cfr.: Amodeo, *Vita Matematica napoletana*, parte 1, Napoli 1905, p. 24 a 30.

matico napoletano, anch'egli dilettante, ma presto cadde nuovamente in obblìo.

In onore dei due matematici citati noi lo chiamiamo metodo di Fermat-Monforte; osservando però che il suddetto metodo fu applicato a funzioni di più variabili da Fermat in modo astruso e con ripieghi difficili a seguirsi in generale; e che il Monforte non considerò i problemi di più variabili.

Qui si estende la regola di Fermat-Monforte anche a' problemi a più variabili senza introdurre alcuno artifizio o variazione e sopratutto senza aver bisogno di teoremi complicati e il tutto seguendo criterii che non devono essere ripudiati quando si voglia seguire la teoria generale della derivata o quando si passa allo studio del Calcolo infinitesimale.

Crediamo perciò che la gioventù studiosa ci potrà essere grati di questa esposizione che apporta ad essa una diminuzione di fatica, e la possibilità di risolvere i problemi più difficili che altrimenti resterebbero insoluti da parte sua.

4. Regola di Fermat-Monforte. La regola risulta dal seguente ragionamento.

Se la funzione è massima o minima per $x = a$ dovrà necessariamente assumere valori eguali per infinite coppie di valori x_1, x_2 dell'intorno di a, e la differenza $f(x_1) - f(x_2)$, che è sempre divisibile per $x_1 - x_2$, conterrà una o più volte il fattore $x_1 - x_2$; soppresso questo fattore $x_1 - x_2$, quante volte è possibile, il quoziente che risulta dovrà essere nullo per l'ipotesi fatta che $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ erano eguali a prescindere da un particolare valore di x e per $x_1 \neq x_2$. Se ora si pone in questo quoziente $x_1 = x_2 = x$, risulterà un'equazione in x, le cui radici in generale rappresenteranno i valori della variabile per i quali la funzione risulta massima o minima. E perciò sostituendo ciascuno di questi valori nella data funzione si avrà il massimo o il minimo valore per esso assunto dalla funzione.

La regola è dunque la seguente:

Si ponga $f(x_1) - f(x_2) = 0$, *e raccolti insieme i termini che hanno fattori comuni, si cerchi di sopprimere quante volte è possibile il fattore* $x_1 - x_2$, *che per solito si presenta. Si ponga dopo* $x_1 = x_2 = x$ *e si risolva l'equazione risultante in* x. *Le radici saranno in generale i valori della variabile per i quali la funzione diventa massima o minima.*

Il primo membro dell'equazione che risulta non è altro che il limite del rapporto

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

per $x_1 = x_2 = x$, e quindi la regola suddetta conduce a trovare ed eguagliare a zero precisamente la *prima derivata della funzione data.*

Quindi la regola suddetta si può enunciare con linguaggio più conciso così:

Si cerchi la derivata prima della funzione e si eguagli a zero; le radici dell'equazione che risulta sono in generale i valori della variabile che rendono massima o minima la funzione. *)

Si può anche decidere qual'è l'andamento della funzione, e quindi se quel valore è massimo o minimo per la funzione o non lo sia affatto, osservando il segno che la derivata assume a sinistra e a destra del punto a in cui la prima derivata si annulla. Se, per es., la prima derivata è positiva a sinistra, negativa a destra di a, la funzione è crescente a sinistra, decrescente a destra e passa perciò per un massimo *). Resta sempre la possibilità che il valore trovato possa non corrispondere ad un valore massimo o minimo della funzione, come per esempio avviene quando la derivata non cambia segno per quel valore.

---

*) La regola di Fermat-Monforte è preferibile alla ricerca diretta delle derivate fino a quando lo studioso non ha acquistato la pratica delle derivate delle funzioni più semplici, poiché quell'unica regola lo condurrà sempre direttamente allo scopo, anche per funzioni complicate.

In alcuni casi, e precisamente quando la funzione data è di secondo grado nella variabile x, può essere utile osservare che, se si risolve rispetto ad x l'equazione $y=f(x)$; i valori di y per i quali la variabile indipendente x assume valori eguali saranno in generale i valori massimi o minimi della funzione.

5. Massimi e minimi di funzioni di più variabili. Quando una funzione f è dipendente da più variabili $x, y, z, \ldots$ si dice che un fatto qualsiasi avviene intorno al gruppo a, $b, c, \ldots$ di valori di questa variabile (oppure come si suol dire intorno al *punto abc...*) quando si vuole affermare che esiste un numero h piccolissimo tale che per tutti i valori

$$\begin{gathered} a-h \leqq x \leqq a+h, \\ b-h \leqq y \leqq b+h, \\ c-h \leqq z \leqq c+h, \\ \ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

ovvero per

$$|x-a| \leqq h \quad, \quad |y-b| \leqq h \quad, \quad |z-c| \leqq h \quad, \quad \ldots,$$

il fatto si verifica sempre, eccettuato soltanto (al più) per il gruppo $a, b, c, \ldots$ cioè per $x=a, y=b, z=c, \ldots$

Si dice che una funzione $f(x, y, z)$ diventa *massima* per il gruppo $a, b, c, \ldots$ delle variabili se intorno a questo gruppo nessun valore della funzione è maggiore di $f(a,b,c,\ldots)$, cioè se si abbia sempre

$$f(a, b, c) \geqq f(x, y, z).$$

Si dice che una funzione $f(x, y, z)$ diventa *minima* per

*) Per decidere se la funzione è massima o minima si può anche ricorrere alla seconda derivata della funzione (che è la prima derivata della sua prima derivata), ritenendo che se la seconda derivata è negativa la funzione è massima, se è positiva la funzione è minima. Ma noi eviteremo di ricorrere a questo criterio (che presenta anch'esso dei dubbi pel caso che la seconda derivata si annulli), per evitare di dover sovraccaricare la teoria di altre nozioni, che sarebbero anche un lusso inutile nel campo elementaro, potendosi le dette cose ottenere direttamente e meglio soltanto dall'esame dell'andamento della prima derivata.

il gruppo a, b, c delle variabili se intorno a questo gruppo nessun valore della funzione è minore di $f(a, b, c)$, cioè se si ha sempre

$$f(a, b, c) \leq f(x, y, z) \ .$$

6. Alle funzioni a più variabili si può estendere la regola di Fermat-Monforte per la ricerca dei valori a, b, c... per i quali esse divengono massime o minime.

Se nella funzione $f(x, y, z)$ diamo a tutte le variabili, eccetto che ad una sola di esse, p. es. x, il valore che esse hanno nel gruppo a, b, c la funzione

$$f(x, b, c)$$

si potrà considerare come funzione di una sola variabile x, che per $x = a$ diventa massima o minima, e quindi dovrà essere nell'intorno di abc

$$f(x_1, b, c) - f(x_2, b, c) = 0$$

ed anche nullo il quoziente che si ottiene da questa equazione con la soppressione del fattore $x_1 - x_2$; ed in questo quoziente posto $x_1 = x_2 = x$ si avrà un'equazione che avrà per radici i valori a che con b e c rappresentano in generale i gruppi nei quali la funzione diviene massima o minima. Analoghe considerazioni si possono fare per la variabile y e per la variabile z, e dalle equazioni

$$f(a, y_1, c) - f(a, y_2, c) = 0 \ , \ f(a, b, z_1) - f(a, b, z_2) = 0$$

si otterranno, con la soppressione dei fattori $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ e col porre rispettivamente $y_1 = y_2 = y$, $z_1 = z_2 = z$, delle equazioni a cui debbono soddisfare i valori a, b, c che rendono massima o minima la funzione data.

Quindi risulta la seguente regola:

Nella equazione data si supponga variabile una per volta una sola delle variabili e si applichi ogni volta la regola di Fermat-Monforte, si avranno tante equazioni quante sono le variabili, che formano un sistema le cui soluzioni rappresentano in generale i gruppi di

valori che fanno divenire massima o minima la funzione.

§ 2. — Discussione delle funzioni.

7. FUNZIONE LINEARE. *La funzione* $y = ax + b$ *non ha massimo né minimo.*

Infatti, posto la derivata eguale a zero, si ha $a = 0$. Il che non dà alcun valore per x.

Alla stessa conclusione si giunge anche per quel che abbiamo osservato al n. **17**, es. 1° del Cap. VII, ma si può anche dedurre da ciò, che questa funzione risoluta rispetto ad x dà $x = \frac{y - b}{a}$, e quindi x acquista sempre un unico valore di y, e perciò y non può mai essere né massimo né minimo.

8. FUNZIONE DI 2° GRADO. *Il trinomio di secondo grado* $y = ax^2 + bx + c$ *ha un valore massimo o minimo per* $x = -\frac{b}{2a}$.

Infatti, posto eguale a zero la derivata si ha

$$2ax + b = 0\ ,$$

cioè

$$x = -\frac{b}{2a}\ ,$$

dunque per questo valore di x, il trinomio può divenire massimo o minimo.

Con la regola di Fermat-Monforte si direbbe: Deve essere

$$ax_1^2 + bx_1 + c - (ax_2^2 + bx_2 + c) = 0$$

e riducendo

$$a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2$

$$a(x_1 + x_2) + b = 0$$

posto ora $x_1 = x_2 = x$ si ha

$$2ax + b = 0$$

cioè $x = -\frac{b}{2a}$, come precedentemente.

Intanto, se è $a>0$, la prima derivata $2ax+b$ del trinomio è negativa per $x<-\frac{b}{2a}$ ed è positiva per $x>-\frac{b}{2a}$, e quindi la funzione per $a>0$ è decrescente a sinistra di $-\frac{b}{2a}$ crescente a destra e perciò diventa minima in quel punto. Mentre, se è $a<0$, la derivata è positiva a sinistra negativa a destra della radice, e quindi la funzione é crescente a sinistra decrescente a dritta di $-\frac{b}{2a}$ e perciò diviene massima in quel punto.

Per sapere qual'è questo massimo o minimo bisogna sostituire nel trinomio ad x il valore trovato e si ha:

$$y=a\frac{b^2}{4a^2}-b\frac{b}{2a}+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=c-\frac{b^2}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Si suole anche giungere a questo risultato risolvendo l'equazione $ax^2+bx+c-y=0$ rispetto alla vàriabile x; con ciò si ha:

$$x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}$$

da cui si vede che x acquista valori eguali quando

$$b^2-4a(c-y)=0,$$

cioè quando $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$. Intanto qui si può osservare che intorno a questo valore di y si hanno valori reali di x per $b^2-4ac+4ay>0$, da cui si ricava $4ay>4ac-b^2$, e quindi se a è positivo sarà $y>\frac{4ac-b^2}{4a}$, e se a è negativo $y<\frac{4ac-b^2}{4a}$. Perciò se a è positivo $\frac{4ac-b^2}{4a}$ è il minimo della funzione e se a è negativo quello è il massimo.

9. Questo risultato conferma quanto abbiamo già osservato al n. **18** del Cap. VI, cioè che il valore minimo o massimo del trinomio di 2^0 grado è sempre rappresentato dall'ordinata del vertice della parabola che rappresenta il

detto trinomio, e l'ascissa di detto vertice dà il valore della variabile pel quale il trinomio diventa minimo o massimo. Nel vertice la tangente geometrica della curva è parallela all'asse delle x, poiché l'angolo che essa fa con l'asse delle ascisse ha per tangente trigonometrica zero e quindi è esso stesso zero.

10. Polinomio di 3° grado. *Il polinomio di 3° grado* $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *ha in generale un valore massimo ed uno minimo se* $b^2 - 3ac > 0$ *e non ha né massimo né minimo se* $b^2 - 3ac \leq 0$.

Invero, applicando la regola data, perché il polinomio sia massimo o minimo deve essere la derivata

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \ ,$$

da cui si ha

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \ .$$

Con la regola di Fermat-Monforte si sarebbe avuto lo stesso risultato. Infatti deve essere

$$(ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d) - (ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d) = 0$$

ovvero

$$a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2$

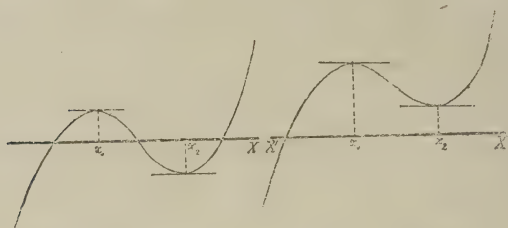
$$a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0$$

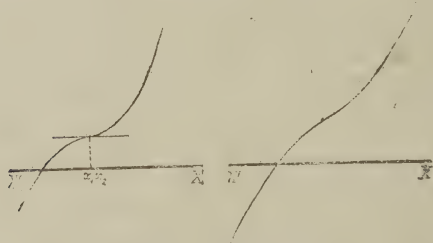
e posto $x_1 = x_2 = x$,

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \ ,$$

come sopra.

Supponiamo per fissare le idee che a sia positivo. In tal caso se le radici x_1, x_2 sono reali e distinte (cioè se $b^2 - 3ac > 0$), la prima derivata $3ax^2 + 2bx + c$ è positiva esternameute all'intervallo (x_1, x_2) e negativa internamente, quindi la funzione data è crescente a sinistra di x_1 decresce nell'intervallo (x_1, x_2) e cresce nuovamente a destra di x_2; perciò la funzione data y assume per x_1 un valore

massimo, e per x_2 un valore minimo, come si vede nelle due curve della figura seguente.

Se le radici del trinomio divengono eguali (cioè se $b^2=3ac$) il trinomio della prima derivata è positivo per qualunque valore della variabile, eccetto che in $-\frac{b}{3a}$, pel quale si annulla, quindi la funzione è crescente a sinistra di $-\frac{b}{3a}$, crescente a dritta di esso, quindi in questo caso la curva non presenta valori massimi o minimi e presenta l'andamento indicato dalla curva a sinistra della figura seguente.

Si dice che la detta curva s'*inflette* nel punto $-\frac{b}{3a}$, o che quel punto è un suo *flesso*, e questo è il caso in cui,

anche essendo $=0$ la derivata, non si ha né massimo, né minimo.

Se invece le radici sono complesse (cioè se $b^2<3ac$), il trinomio della prima derivata è sempre positivo per qualunque valore della variabile, quindi la funzione è sempre

crescente per qualunque valore della variabile e perciò nemmanco in questo caso la curva presenta massimo, né minimo.

II. FUNZIONI FRATTE DI 1° GRADO.

Trovare i valori massimi o minimi della funzione omografica $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ *(supposto* $a' \neq 0$*) e discutere la funzione.*

La funzione non è continua per $a'x + b' = 0$ quindi occorre considerarla nei due intervalli $\left(-\infty, -\frac{b'}{a'}\right), \left(-\frac{b'}{a'}, +\infty\right)$

La derivata della data funzione è (n. **19**, 13°, VII)

$$y = \frac{ab' - a'b}{(a'x + b')^2};$$

essa è quindi sempre positiva o sempre negativa o sempre nulla, secondo che $ab' - a'b \gtreqless 0$.

La funzione è quindi sempre crescente se $ab' - a'b > 0$, sempre decrescente se $ab' - a'b < 0$, sempre costante se $ab' - a'b = 0$. Perciò la funzione non ha né massimo, né minimo.

Si può anche osservare che la funzione $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ resa intera dà

$$x(a - a'y) + b - b'y = 0 ,$$

dalla quale si vede che ad ogni valore di y corrisponde un solo valore di x; e quindi anche in tal modo si conchiude che non vi sono massimi o minimi.

Se $ab' - a'b$ è nullo $\left(\text{cioè se } \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}\right)$, numeratore e denominatore si annullano contemporaneamente, e la funzione

$$y = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{a'\left(x + \frac{b'}{a'}\right)}$$

è sempre eguale ad $\frac{a}{a'}$ eccetto che per $x = -\frac{b}{a}$, nel qual caso la funzione prende qualunque valore.

Risoluta per rispetto ad x ci dà $x = -\frac{b'\left(\frac{b}{b'} - y\right)}{a'\left(\frac{a}{a'} - y\right)}$,

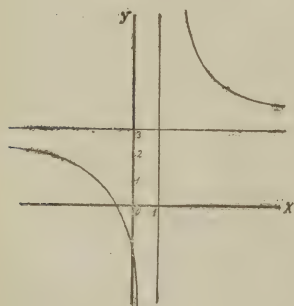
da cui si vede che per qualunque valore di y la $x = -\frac{b'}{a'}$, eccetto che $y = -\frac{b}{b'}$ nel qual caso la x prende qualunquè valore. Da ciò si deduce che la funzione in tal caso è rappresentata da due rette parallele agli assi che tagliano questi nei punti $x = -\frac{b}{a}$, $y = -\frac{b}{b'}$.

P. es. la funzione $y = \frac{4x + 6}{2x + 3}$ è rappresentata da due rette perpendicolari parallele agli assi, una che passa per $y = 2$, l'altra per $x = -\frac{3}{2}$.

Sia la funzione $y = \frac{3x + 2}{x - 1}$. Essa è discontinua nel punto $x=1$, e quindi è continua negli intervalli $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$.

Osservando che:

$$\lim_{x=1-0} y = \lim_{\varepsilon=0} \frac{5}{-\varepsilon} = -\infty,$$

$$\lim_{x=1+0} y = \lim_{\varepsilon=0} \frac{5}{+\varepsilon} = +\infty,$$

ed osservando ancora che, pel n. **28** del Cap. VII, $\lim\limits_{x=\infty} y = 3$; risulta che la funzione decresce da 3 a $-\infty$ nell'intervallo $(-\infty, 1)$, salta da $-\infty$ a $+\infty$ nel punto 1, e decresce da $+\infty$ a 3 nell'intervallo $(+\infty, 1)$.

La curva di questo diagramma è un'*iperbole equilatera*, essa ha un *assintoto* nella retta perpendicolare all'asse OX nel punto 1,

e un altro assintoto nella retta perpendicolare all'asse OY nel punto 3.

12. FUNZIONI FRATTE DI 2° GRADO. *Trovare i valori massimi e minimi della funzione frazionaria*

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} ,$$

nell'ipotesi che a *ed* a' *siano* $\neq 0$ *e discutere la funzione.*

Occorre notare che la funzione data non è continua per i valori che annullano il denominatore, perciò occorre considerare la funzione negl' intervalli in cui quei valori dividono la variabile numerica. Per trovare i valori di x che la rendono massima o minima, applichiamo la regola per trovare la derivata di una funzione fratta. Per questa regola risulta che la derivata è

$$\frac{(2ax + b)(a'x^2 + b'x + c') - (2a'x + b')(ax^2 + bx + c)}{(a'x^2 + b'x + c')^2} ,$$

ovvero, riducendo,

$$\frac{(ab' - a'b)x^2 + 2(ac' - a'c)x + (bc' - b'c)}{(a'x^2 + b'x + c')^2}$$

Il denominatore di questa derivata è sempre positivo negli intervalli in cui la funzione è continua, perciò in essi la derivata conserva il segno del numeratore; essa si annulla per i valori che rendono

$$(ab' - a'b)x^2 + 2(ac' - a'c)x + (bc' - b'c) = 0 . \qquad (1)$$

Quindi i valori per i quali la funzione diventa massima o minima sono :

$$x = \frac{-(ac' - a'c) \pm \sqrt{(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c)}}{ab' - a'b} ;$$

e perchè essi esistano effettivamente occorre anzitutto che il discriminante della (1), che abbiamo già indicato (Cap.

V, **13**) con $-$ R, sia $\geqq 0$, cioè che sia

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) \geqq 0 \; . \tag{2}$$

Però quando la (2) è eguale a zero, essa rappresenta la condizione necessaria e sufficiente, affinchè i termini della funzione data abbiano un fattor comune (*Algebra*, Cap. VI, **9**) *): sopprimendo questo fattore si ha che la funzione prende la forma

$$y = \frac{mx + n}{m'x + n'} \; ,$$

cioè diviene una funzione di primo grado. Dunque nel caso che la (2) sia $= 0$ la funzione non ha né massimo, né minimo.

Un altro caso in cui la funzione non ha né massimo, né minimo si ha quando $-$ R è < 0. In tal caso la derivata conserva sempre lo stesso segno, quindi la funzione è sempre crescente o sempre decrescente; dippiù le radici del numeratore è del denominatore della y si separano, il che importa che le une e le altre debbano essere necessariamente reali, cioè che sia $b^2 - 4ac > 0$, $b'^2 - 4a'c' > 0$.

Se indichiamo con α e β le radici del denominatore, per questi valori della x la funzione è discontinua, e perciò essa è continua negli intervalli $(-\infty, \alpha)$, (α, β), $(\beta, +\infty)$; e quindi se $ab' - a'b$ è positivo la funzione sarà crescente in ognuno dei detti intervalli e presenta la forma data dalla figura appresso segnata; se invece il primo coefficiente è negativo, la funzione sarà decrescente in ognuno dei suddetti intervalli.

Allorquando le radici x_1 ed x_2 della derivata sono reali e distinte, cioè quando sia

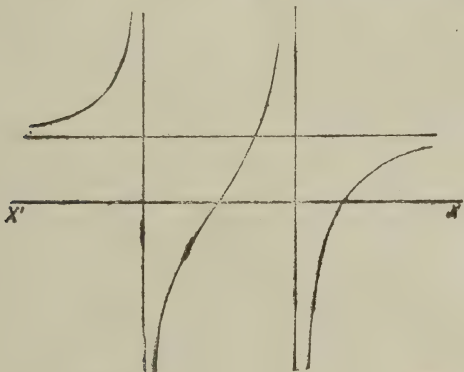
$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) > 0 \; , \tag{3}$$

per i valori x_1, x_2 la funzione può divenire massima o minima. Per riconoscere se e quale di essi è massimo e qua-

*) Cfr. anche *Aritm. ed Alg.*, Cap. XII, 9.

le minimo, occorre esaminare i tre casi:

$$ab' - a'b > 0 \ , \ ab' - a'b < 0 \ , \ ab' - a'b = 0 \ .$$

Se è $ab' - a'b > 0$, la derivata è positiva esternamente all'intervallo delle radici, è negativa nell' interno di esso, quindi, a prescindere dalla discontinuità che la funzione y assume per i valori α e β che annullano il denominatore, se esistono, essa deve essere crescente in ciascuno degli intervalli in cui è continua quando x varia da $-\infty$

ad x_1, decrescente nell'intervallo (x_1, x_2) o negli intervalli in esso compreso, e crescente nell'intervallo $(x_2, +\infty)$ o negli intervalli in cui questo può essere spezzato dalle discontinuità della funzione.

E perciò la funzione sempre assume un valore *massimo* in x_1, ed un valore *minimo* in x_2.

Se è $ab' - a'b < 0$, la derivata è negativa esternamente all'intervallo (x_1, x_2) e positiva internamente ad esso; quindi, con le stesse cautele indicate sopra, la funzione è decrescente nell'intervallo $(-\infty, x_1)$, crescente nell'intervallo (x_1, x_2), e decrescente nell'intervallo $(x_2, +\infty)$. E perciò la funzione diviene *minima* in x_1 e *massima* in x_2.

Se $ab' - a'b = 0$, il segno della derivata dipende da

$$2(ac' - a'c)x + (bc' - b'c) \ ,$$

e quindi essa si annulla per $x_1 = -\frac{bc' - b'c}{2(ac' - a'c)}$ (oltre che per $x = \infty$). Inoltre se è $ac' - a'c > 0$ la derivata è negativa a sinistra, positiva a destra di x_1 e quindi la funzione decresce nell'intervallo $(-\infty, x_1)$ cresce nell'intervallo $(x_1, +\infty)$ e perciò è *minima* in x_1 e *massima* per $x = \infty$.

Se invece $ac' - a'c < 0$, avviene il contrario, cioè la funzione è *massima* in x_1, *minima* per $x = \infty$.

Si può dunque conchiudere così:

La funzione data non ha massimo nè minimo quando la risultante dei due termini della funzione, $-R = (ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c)$, *è minore o eguale a zero; ha invece un massimo ed un minimo quando la risultante è maggiore di zero; e questi si hanno per i valori* x_1 *ed* x_2 *dell'equazione*

$$(ab' - a'b)x^2 + 2(ac' - a'c)x + (bc' - bc') = 0 .$$

E più precisamente:

se è $ab' - a'b > 0$, *la funzione è massima in* x_1, *minima in* x_2;
se è $ab' - a'b < 0$, *la funzione è minima in* x_1, *massima in* x_2;

se è $ab' - a'b = 0$ *ed* $\begin{cases} ac' - a'c > 0, \text{ la funzione è minima in } x_1, \text{ massima all'}\infty, \\ ac' - a'c < 0, \text{ la funzione è massima in } x_1, \text{ minima all'}\infty . \end{cases}$

13. Sostituendo i valori di x_1 ed x_2 nella espressione della funzione y si trovano i valori massimi e minimi della funzione; ma ad essi si può pervenire direttamente anche nel seguente modo, che ci piace di riportare per curiosità di confronto. Moltiplichiamo la (3) per 4 ed aggiungiamo e sottragghiamo i termini $16aa'cc'$ e $b^2b'^2$, si ha:

$$4(ac' + a'c)^2 - 4ab'bc' - 4a'bb'c + 4ab'^2c + 4a'b^2c' - 16aa'cc' + b^2b'^2 - b^2b'^2 > 0 ,$$

ovvero, semplificando,

$$4(ac' + a'c)^2 - 4bb'(ac' + a'c) + b^2b'^2 - b'^2(b^2 - 4ac) + 4a'c'(b^2 - 4ac) > 0 ,$$

che può essere scritta in quest' altro modo

$$(2ac' + 2a'c - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') = 0 . \qquad (4)$$

Vediamo ora che cosa rappresenta questa equazione. Dalla data funzione ricaviamo il valore di x; liberandola da' fratti si ha

$$(a'x^2 + b'x + c')y = ax^2 + bx + c ,$$

la quale, ordinata rispetto ad x, diviene

$$(a - a'y)x^2 + (b - b'y)x + (c - c'y) = 0 , \qquad (5)$$

e risoluta dà

$$x = \frac{-(b - b'y) \mp \sqrt{(b - b'y)^2 - 4(a - a'y)(c - c'y)}}{2(a - a'y)} .$$

Il discriminante della (5), sviluppato dà:

$$b^2 - 2bb'y + b'^2y^2 - 4ac - 4a'c'y^2 + 4ac'y + 4a'cy ,$$

ordinato ed eguagliato a zero diviene

$$(b'^2 - 4a'c')y^2 + 2(2ac' + 2a'c - bb')y + b^2 - 4ac = 0 , \qquad (6)$$

e risoluto rispetto ad y dà per radici

$$y = \frac{-(2ac' + 2a'c - bb') \mp \sqrt{(2ac' + 2a'c - bb')^2 - (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')}}{b'^2 - 4a'c'} .$$

E quindi risulta che la formola (4) rappresenta la condizione perché il trinomio (6) abbia radici reali e distinte.

Indichiamo con y_1 ed y_2 le radici del trinomio (6) ed osserviamo che esso assume valori positivi per i valori di y compresi fra le radici y_1 ed y_2, se il coefficiente del primo termine è negativo, e per i valori esterni alle radici, se il coefficiente del primo termine è positivo. Dunque nel caso che sia $b'^2 - 4a'c' < 0$ tutti i valori della y che dànno al trinomio (6) un valore positivo, e quindi corrispondono a valori reali della x, sono compresi fra y_1 ed y_2, cioè soddisfano a questa condizione:

$$y_1 \leq y \leq y_2 ,$$

e perciò y_1 è un minimo ed y_2 è un massimo dei valori che la funzione y può assumere.

Nel caso che sia $b'^2 - 4a'c' > 0$ i valori della y soddisfano invece alle condizioni

$$y \leqq y_1 \quad ; \quad y_2 \leqq y \ ,$$

dunque in tal caso y_1 è un massimo ed y_2 è un minimo della funzione y.

Resta solo a vedere che cosa avviene quando $b'^2 - 4a'c' = 0$, cioè quando il denominatore della funzione data si riduce ad un quadrato. Il trinomio (6) diviene in tal caso

$$2(2ac' + 2a'c - bb')y + b^2 - 4ac \geqq 0 \ , \tag{7}$$

e quindi, se il suo primo coefficiente è positivo, si avrà:

$$y \geqq \frac{-(b^2 - 4ac)}{2(2ac' + 2a'c - bb')} \ ,$$

e l'unica radice della (7) rappresenta un minimo della funzione. Se invece il primo coefficiente è negativo si ha

$$y \leqq \frac{-(b^2 - 4ac)}{2(2ac' + 2a'c - bb')} \ ,$$

e in tal caso l'unica radice della (7) rappresenta un massimo della funzione y. Il trinomio (6) ha però in questo caso un'altra radice $= \pm\infty$, e questa è rispettivamente un massimo o un minimo.

Riepilogando dunque si ha:

$$\text{Se} \left\{ \begin{array}{lll} b'^2 - 4a'c' < 0 \,, & y_1 \text{ è minimo} \ , & y_2 \text{ è massimo;} \\ b'^2 - 4a'c' > 0 \,, & y_1 \text{ è massimo} \ , & y_2 \text{ è minimo;} \\ b' - 4a'c' = 0 \text{ e} & \left\{ \begin{array}{ll} 2ac' + 2a'c - bb' > 0 \,, & \left\{ \begin{array}{l} y_1 = +\infty \text{ è massimo} \\ y_2 \text{ è minimo;} \end{array} \right. \\ 2ac' + 2a'c - bb' < 0 \,, & \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -\infty \text{ è minimo} \\ y_2 \text{ è massimo.} \end{array} \right. \end{array} \right. & \end{array} \right.$$

I valori massimi e minimi di y fanno essere $x = -\frac{b'-b'y}{2(a-a'y)}$; dalla quale equazione, risolvendo rispetto ad y, si ha $y = \frac{2ax+b}{2a'x+b'}$; quindi nella pratica, allorquando si sono trovati i valori reali e distinti della x, a cui devono corrispondere i valori massimi o minimi della y, si sostituiscono in $y = \frac{2ax+b}{2a'x+b'}$, e si hanno i valori cercati. Però quando i valori x_1 ed x_2 si presentano sotto forma irrazionale, più pratico è di ricavare direttamente i valori y_1, y_2 dall'equazione (6).

14. ESEMPII.

1.° *Discutere la funzione* $\frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-20}$.

I valori che annullano il denominatore sono $x = -{}^{10}/_{3}, 2$; quindi la funzione è continua negli intervalli $(-\infty, -3\,{}^{1}/_{3})$, $(-3\,{}^{1}/_{3}, 2)$, $(2, +\infty)$.

Inoltre diviene nulla per i valori che annullano il numeratore, cioè per $x = 1, {}^{3}/_{2}$, e diviene $= \frac{2}{3}$, per $x = \pm\infty$.

I valori di x che rendono massima e minima la funzione data si ottengono dall'equazione

$$(8+15)x^2 + 2(-40-9)x + (100-12) = 0,$$

cioè

$$23x^2 - 98x + 88 = 0,$$

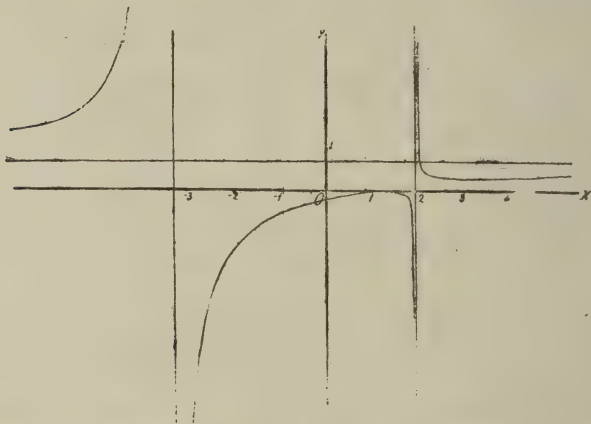
e quindi

$$x = \frac{49 \mp \sqrt{377}}{23};$$

dove x_1 è un numero irrazionale compreso fra 1 e ${}^{3}/_{2}$ ed x_2 è analogo numero vicinissimo a 3 compreso fra 3 e 4.

E siccome la derivata è positiva per i valori esterni all'intervallo delle radici ed è negativa per i valori interni ad esso; ne deduciamo che la funzione data nel primo intervallo è crescente da $\frac{2}{3}$ a $+\infty$; è crescente nel secondo intervallo da $-\infty$ al va-

lore che essa assume in x_1, che è perciò *massimo*, indi decresce fino a $-\infty$; e nel terzo intervallo decresce da $+\infty$ al valore che essa assume in x_2, che è perciò *minimo*, per poi crescere lentamente da questo a $\frac{2}{3}$ (veggasi la figura).

I valori massimi e minimi di y si possono trovare direttamente

ricorrendo alla (6), la quale dà

$$256y^2 + 2(-80 + 18 + 20)y + (25 - 24) = 0\,,$$

ovvero

$$256y^2 - 84y + 1 = 0\,,$$

e risolvendo

$$y = \frac{21 \mp \sqrt{377}}{128}\,.$$

Per vedere qual'è il massimo e qual'è il minimo della funzione si poteva guardare il discriminante del denominatore; questo è

$$16 + 240 > 0\,,$$

quindi y_1 è massimo ed y_2 è minimo.

Sicché il massimo è $\frac{21 - \sqrt{377}}{128} \backsim \frac{1}{64}$ *), ed il minimo è $\frac{21 + \sqrt{377}}{128} \backsim \frac{5}{16}$.

*) Con questo segno $\backsim$ si intende dire *è eguale circa a* oppure *è eguale approssimatamente a.*

Per trovare questi valori si possono sostituire in $y=\frac{4x-5}{6x+4}$, i valori x_1, x_2 trovati per x, e si ha:

$$y=\frac{196\mp 4\sqrt{377}-115}{294\mp 6\sqrt{377}+92}=\frac{81\mp 4\sqrt{377}}{2(193\mp 3\sqrt{377})}=$$

$$=\frac{(81\mp 4\sqrt{377})(193\pm 3\sqrt{377})}{2(193^2-9\cdot 377)}=\frac{11109\mp 529\sqrt{377}}{2\cdot 33856}=\frac{21\mp\sqrt{377}}{128}.$$

Si rileva dalla discussione che la curva che rappresenta la data funzione ha tre asintoti: due perpendicolari all'asse OX nei punti $-{}^{10}/_3$ è 2, l'altro perpendicolare all'asse OY nel punto $\frac{2}{3}$.

15. 2.° *Discutere la funzione* $y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x+3}$.

Di questa funzione il denominatore non ha radici reali, quindi essa è continua per tutti i valori della variabile; inoltre essa si annulla per i valori 2 e 3 della variabile, e diviene eguale ad 1 per $x=\mp\infty$. I valori di x che rendono massima o minima la funzione data si ottengono dall'equazione

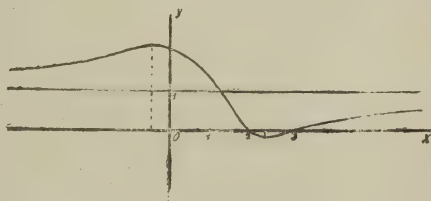
$$(-2+5)x^2+2(3-6)x+(-15+12)=0,$$

cioè da

$$x^2-2x-1=0,$$

e quindi sono

$$x=1\mp\sqrt{2};$$

e poiché la derivata è positiva per i valori esterni all'intervallo delle radici $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, e negativa per i valori interni, si può conchiudere che la detta funzione è crescente quando x varia da $-\infty$ ad x_1, indi decresce quando x varia da x_1 ad x_2 e poi cresce nuovamente quando x varia da x_2 a $-\infty$. Sicché in x_1 si ha il massimo ed in x_2 il minimo valore.

Questi valori massimo e minimo si ottengono sostituendo x_1 ed x_2 in

$$y = \frac{2x - 5}{2x - 2},$$

e si ha

$$y = \frac{-3 \mp 2\sqrt{2}}{\mp 2\sqrt{2}} = \frac{\pm 3\sqrt{2} + 4}{4} = 1 \pm \frac{3}{4}\sqrt{2} \ ;$$

oppure dall'equazione (6),

$$-8y^2 + 16y + 1 = 0 \ ,$$

che ha per radici

$$y_1 = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{2} \quad , \quad y_2 = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

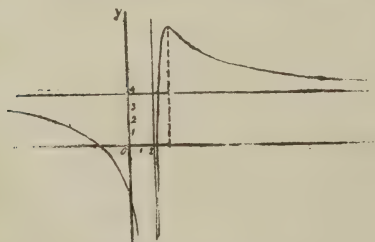
e poichè il coefficiente di y^2 è negativo risulta che

y_1 è il minimo , y_2 è il massimo

valore della funzione.

La curva che rappresenta la data funzione ha un solo asintoto perpendicolare all'asse OY nel punto 1.

16. 3.° *Discutere la funzione* $y = \dfrac{4x^2 - 4x - 15}{x^2 - 4x + 4}$.

Il denominatore di questa funzione è quadrato perfetto $=(x-2)^2$, quindi la funzione diviene ∞ solo per $x = 2$, e perciò essa è continua negli intervalli $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$. Essa si annulla per $x = -{}^3/_2$, e $2\,{}^1/_2$ e diviene eguale a 4 per $x = \mp\infty$, mentre è $= -\infty$ per $x = 2$.

I valori di x che rendono massima o minima la funzione si ottengono dall'equazione

$$(-16 + 4)\,x^2 + 2\,(16 + 15)\,x + (-16 - 60) = 0$$

cioè da

$$-6x^2 + 31x - 38 = 0 \ ,$$

e quindi sono

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 3\ {}^1/_6 \ ;$$

e poiché la derivata è negativa esternamente all'intervallo delle radici, risulta che la funzione nel primo intervallo decresce da 4 a — ∞, nel secondo intervallo cresce da — ∞ al valore che assume in x_2, per poi decrescere nuovamente fino a 4.

Sicché il massimo valore della funzione si ha per $x_2 = 3\ {}^1/_6$; ed il minimo valore è — ∞ quando $x = 2$.

Questi valori si possono ottenere sostituendo $3{}^1/_6$ e 2 in

$$y = \frac{8x - 4}{2x - 4} = \frac{4x - 2}{x - 2}$$

e si ha $y = 9\ {}^1/_7$ e ∞, oppure dall'equazione

$$0y^2 - 28y + 256 = 0$$

che ha una radice ∞, e l' altra $= \dfrac{64}{7}$.

La curva che rappresenta la funzione data ha un asintoto perpendicolare all'asse OX nel punto 2, ed un altro perpendicolare all'asse OY nel punto 4.

17. 4.° *Discutere la funzione* $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x + 1}$.

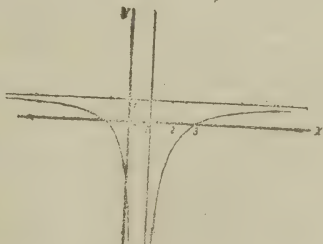
Il denominatore di questa funzione è un quadrato perfetto $(x - 1)^2$, quindi la funzione diviene ∞ solo per $x = 1$, e perciò essa è continua negli intervalli (— ∞, 1), (1, + ∞). Essa si annulla per $x = -1$ e 3, diviene eguale a 1 per $x = \mp \infty$.

I valori di x che rendono massima o minima la funzione si ottengono dall'equazione derivata

$$0x^2 + 8x - 8 = 0$$

e quindi sono

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \infty \ ;$$

e poiché la derivata è negativa per $x < 1$, e positiva per $x > 1$, risulta che la funzione decresce da 1 a — ∞ nell'intervallo (— ∞, 1) e poi cresce da — ∞ a 1 nell'intervallo (1, + ∞), sicché in

$x = 1$ si ha un minimo della funzione, ed in $x = \infty$ si ha il massimo.

Per avere il valore massimo e il minimo della funzione si può ricorrere direttamente alla funzione data e si trova

$$\lim_{x=1} y = -\infty, \quad \lim_{x=\pm\infty} y = 1 .$$

La curva che rappresenta la funzione data ha un asintoto perpendicolare all'asse OX in $x = 1$, ed un altro perpendicolare all'asse OY nel punto 1.

18. APPLICAZIONI.

Problema I.° *Di due numeri positivi di cui la somma è costante ed è eguale a* 2a, *trovare il massimo prodotto, oppure la minima somma dei loro quadrati.*

1.° Sia x uno dei numeri, l'altro sarà $2a - x$ e quindi il loro prodotto è

$$y = x(2a - x) = -x^2 + 2ax .$$

Poiché il coefficiente di x^2 è negativo, la funzione y deve assumere un valore massimo e ciò avviene per $x = a$ (n. **8**).

Volendo fare a meno del teorema della funzione di 2° grado si dirà: applicando la regola, dev'essere la derivata

$$-2x + 2a = 0 ,$$

e siccome questa è positiva per $x < a$, e negativa per $x > a$, si ha un massimo per $x = a$.

Dunque si ha il massimo prodotto quando i numeri sono eguali fra loro, ed il prodotto massimo è $y = a^2$.

Si può anche giungere elegantemente e direttamente alla soluzione del problema qualora uno dei numeri si ponga eguale ad $a + z$; l'altro sarà eguale ad $a - z$ e il prodotto è

$$(a + z)(a - z) = a^2 - z^2 ,$$

da cui si vede che esso è sempre minore di a^2, eccetto quando $z = 0$.

L'interpetrazione geometrica del problema dato è la seguente: *Di tutti i rettangoti di egual perimetro il quadrato è il massimo.*

2.° La somma dei quadrati dei due numeri è $x^2 + (2a - x)^2$, quindi dobbiamo cercare il minimo di

$$y = 2x^2 - 4ax + 4a^2 .$$

Questo trinomio effettivamente prende un valore minimo per $x = \frac{4a}{2 \cdot 2} = a$; e il suo minimo valore è $y = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Se invece si fosse preso una parte eguale ad $a + z$ e l'altra ad $a - z$, si avrebbe dovuto cercare il minimo della somma

$$y = (a + z)^2 + (a - z)^2 = 2a^2 + 2z^2 ,$$

che è sempre maggiore di $2a^2$ per $z \neq 0$, e quindi il suo minimo valore è $2a^2$ per $z = 0$.

L'interpetrazione geometrica di questo problema è la seguente: *Di tutti i rettangoli di eguale perimetro quello che ha la minima diagonale è il quadrato.*

19. Problema 2.° *Di due numeri positivi di cui è costante il prodotto* p^2 *trovare la minima somma, oppure trovare la minima somma dei loro quadrati.*

1.° Se x è uno dei numeri, l'altro sarà $\frac{p^2}{x}$, e la somma è

$$y = x + \frac{p^2}{x} ;$$

ed applicando la regola data per la ricerca del massimo o minimo si ha che deve essere la derivata $1 - \frac{p^2}{x^2} = 0$, la quale si annulla per $x = p$, passando dal valcre negativo al positivo.

Applicando direttamente la regola di Fermat-Monforte, si ha

$$x_1 + \frac{p^2}{x_1} - \left(x_2 + \frac{p^2}{x_2} \right) = 0 \quad , \quad (x_1 - x_2) - p^2 \, \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = 0 ,$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2$:

$$1 = \frac{p^2}{x_1 x_2} ,$$

ed eguagliando le variabili si ha $x^2 = p^2$ ovvero $x = p$.

Sicché per essere minima la somma dei due membri essi devono essere eguali fra loro e perciò la minima somma è $y = 2p$. L' interpretazione geometrica è la seguente:

Di tutti i rettangoli che hanno eguale area il quadrato ha il minimo perimetro.

2.° La somma dei quadrati dei due numeri è:

$$y = x^2 + \frac{p^4}{x^2},$$

ed applicando la solita regola si ha successivamente:

$$x_1^2 + \frac{p^4}{x_1^2} - \left(x_2^2 + \frac{p^4}{x_2^2}\right) = 0 \quad , \quad (x_1^2 - x_2^2) - p^4 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = 0 \ ,$$

$$1 = \frac{p^4}{x_1^2 x_2^2} \quad , \quad x^4 = p^4 \quad , \quad x = p \ ,$$

a cui corrisponde $y = 2p^2$.

Si poteva anche osservare che ponendo $x^2 = z$, il problema si riduce a trovare il minimo di $y = z + \frac{p^4}{z}$, e pel caso precedente dev' essere $z = p^2$, e quindi $x = p$.

L' interpretazione geometrica è la seguente:

Di tutti i rettangoli di eguale area il quadrato ha la minima diagonale.

20. Problema 3.° *Di due numeri positivi di cui è costante la somma dei loro quadrati,* s², *si cerca qual' è il massimo prodotto, oppure qual' è la massima somma.*

1.° Se s' indica con x uno dei numeri l'altro è $\sqrt{s^2 - x^2}$, e si è indotti a cercare il massimo di

$$y = x\sqrt{s^2 - x^2}.$$

I valori di x che rendono massima quest' espressione rendono massimo anche il suo quadrato, quindi siam ridotti a trovare il massimo di

$$x^2(s^2 - x^2) \ ;$$

e poiché i due fattori di questo prodotto x^2 ed $s^2 - x^2$ hanno

per somma costante s^2, si avrà il massimo prodotto quando i fattori sono eguali fra loro, cioè quando

$$x^2 = s^2 - x^2 \quad , \quad 2x^2 = s^2 \quad , \quad x = \frac{s}{\sqrt{2}} \; .$$

L' interpretazione geometrica del presente problema è la seguente:

Di tutti i rettangoli iscritti nello stesso cerchio il quadrato è il massimo.

2.° Per la seconda questione bisogna cercare il massimo di

$$x + \sqrt{s^2 - x^2} \, ;$$

e poichè il valore di x che rende massima o minima questa somma rende massimo o minimo anche il suo quadrato, siam ridotti a cercare per qual valore di x risulta massima l' espressione

$$x^2 + s^2 - x^2 + 2x\sqrt{s^2 - x^2} \quad \text{o l'altra} \quad s^2 + 2x\sqrt{s^2 - x^2} \, .$$

Il massimo o minimo di quest'espressione dipende soltanto dal prodotto $x\sqrt{s^2 - x^2}$, e quindi siamo ridotti alla prima parte del problema, perciò il valore massimo si ha per $x = \frac{s}{\sqrt{2}}$.

L' interpretazione geometrica è la seguente:

Di tutti i rettangoli iscritti nello stesso cerchio il quadrato è quello di massimo perimetro.

21. Problema 4.° *Scomporre un numero positivo* a *in due parti* x, y *tali che il prodotto* $x^p y^q$, *ove* p *e* q *sono interi e positivi, sia massimo.*

Per la regola data, per avere il massimo o minimo deve essere eguale a zero la derivata di

$$x^p(a - x)^q \, ,$$

cioè deve essere (per l' esempio 10° del n. **19** del Cap. VII)

$$px^{p-1}(a - x)^q - qx^p(a - x)^{q-1} = 0 \; .$$

Questa equazione si scinde in fattori così:

$$x^{p-1}(a - x)^{q-1}\left[p(a - x) - qx\right] = 0 \; ,$$

ed essa si annulla per $\frac{x}{p} = \frac{a-x}{q}$, ovvero per $x = \frac{pa}{p+q}$ e quindi $y = \frac{qa}{p+q}$, passando dal valore positivo al negativo; da ciò deriva che per questi valori di x ed y il prodotto diviene massimo. Però la derivata si annulla pure per $x = 0$, $a - x = 0$, ma per questi valori la derivata cambia segno soltanto se p o q è pari, e passa dal valore negativo al positivo, quindi il prodotto è minimo per $x = 0$ se p è pari, e per $x = a$ se q è pari. Quindi:

Il massimo del prodotto $x^p (a - x)^q$ *si ha dividendo il numero* a *in parti proporzionali agli esponenti* p *e* q.

22. Problema 5.° *Trovare il minimo valore di* x *pel quale diventa massimo il prodotto* sen x cos x.

Il valore di x che rende massimo questo prodotto rende anche massimo il prodotto risultante dal suo quadrato.

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x ;$$

ma di questo prodotto, la somma dei fattori è costante,

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 ,$$

dunque il prodotto sarà massimo quando $\operatorname{sen} x = \cos x$, cioè quando

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} (90^0 - x) .$$

Ciò importa che sia almeno $2x = 90^0$; quindi

$$x = 45^0$$

è il più piccolo valore che risponde al problema.

Si poteva anche dire così:

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x ,$$

e quindi il problema si riduce a trovare il valore di x che rende massimo sen $2x$. Ma il massimo valore del seno è 1, e ciò si ha per $2x = 90^0$, quindi $x = 45^0$.

Gli altri valori di x che rendono massimo il prodotto sen x cos x

sono dati dalla formola

$$x = k \cdot 180^0 + 45^0 .$$

23. Problema 6.° *Trovare per qual valore di* x *è massima la somma* sen x + cos x.

Il valore di x che rende massima questa somma rende anche massimo il suo quadrato

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x ,$$

il quale si riduce a

$$1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x .$$

E così si ricade nel problema precedente.

24. Problema 7.° *Trovare l' altezza massima a cui perviene un grave spinto nel vuoto dal basso in alto con velocità* v.

Indicando con g la gravità, con t il tempo e con y l'altezza a cui perviene il grave al tempo t, si ha:

$$y = vt - \frac{gt^2}{2} ;$$

siamo quindi indotti a cercare il massimo di quest' espressione. Applicando il teorema del trinomio di secondo grado, il valore massimo di y si ha per $t = \frac{v}{g}$.

Sostituendo questo valore nell'espressione di y, si ha che l'altezza a cui il mobile perviene è

$$y_0 = \frac{v^2}{g} - \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} .$$

Da ciò si ottiene

$$v = \sqrt{2gy_0} ,$$

e ciò dice che l'altezza a cui il grave perviene è quella da cui esso dovrebbe cadere affinchè alla fine della corsa potesse acquistare la velocità v.

25. Problema 8.° *Di tutti i triangoli di egual perimetro* 2p *e di eguale base* a, *trovare il massimo.*

Se con x si indica il lato b, sarà $c = 2p - a - x$, e quindi l'area del triangolo, per la formola $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, è espressa da

$$\sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}\ .$$

Il valore di x che rende massima quest' espressione è quello stesso che rende massimo il prodotto

$$(p-x)(a+x-p)\ ;$$

ma la somma di questi fattori è costantemente eguale ad a, dunque si ha il massimo quando i due fattori sono eguali, cioè quando il triangolo è isoscele.

26. Problema 9.° *Inscrivere in un triangolo di base* b *ed altezza* h *il massimo rettangolo.*

Indichiamo con x ed y rispettivamente l' altezza e la base del rettangolo iscritto nel triangolo dato. Dai triangoli simili ABC, DBE, si ha:

$$b : y = h : h - x\ ;$$

da cui

$$y = \frac{b(h-x)}{h}\ ,$$

e quindi l'area del rettangolo xy è data da

$$\frac{bx(h-x)}{h}\ .$$

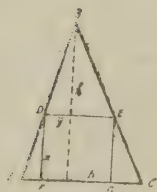
Il massimo di quest' espressione si ha per i valori di x che rendono massimo il prodotto

$$x(h-x)\ ,$$

di cui i fattori hanno una somma costante h, e quindi si ha il massimo per

$$x = h - x\ ,$$

cioè per

$$x = \frac{h}{2}\ .$$

Quindi il rettangolo massimo è quello che ha per altezza la metà dell'altezza del triangolo.

27. Problema 10.° *Circoscrivere ad una sfera il cono di minimo volume.*

Sia r il raggio della sfera ed x l'altezza del cono, e troviamoci il raggio della base del cono. I due triangoli simili ADC, AEO, danno:

$$DC : AD = OE : AE ,$$

cioè

$$DC : x = r : \sqrt{x(x-2r)} ,$$

e quindi

$$DC = \frac{rx}{\sqrt{x(x-2r)}} ;$$

e da ciò si deduce che il volume del cono

$$V = \pi . \overline{DC}^2 \cdot \frac{1}{3} x = \frac{\pi}{3} . \frac{r^2 x^3}{x(x-2r)} = \frac{\pi r^2}{3} . \frac{x^2}{x-2r} ,$$

e siamo quindi ridotti a trovare il minimo della funzione $\frac{x^2}{x-2r}$.

Applicando la solita regola deve essere

$$\frac{x_1^2}{x_1-2r} - \frac{x_2^2}{x_2-2r} = 0 ,$$

e liberando da' fratti (non tenendo conto dei valori di x che annullano il denominatore)

$$x_1^2 x_2 - 2rx_1^2 - (x_1 x_2^2 - 2rx_2^2) = 0 ,$$

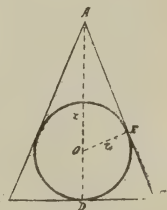
e trasponendo

$$x_1 x_2 (x_1 - x_2) - 2r(x_1^2 - x_2^2) = 0 ,$$

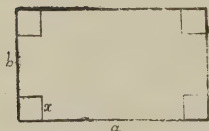
e sopprimendo il fattore comune $x_1 - x_2$

$$x_1 x_2 - 2r(x_1 + x_2) = 0 ,$$

e ponendo $x_1 = x_2 = x$, risulta $x^2 - 4rx = 0$.

La derivata si annulla o per $x = 0$, e questo è assurdo per un cono circoscritto, oppure si annulla per $x = 4r$ passando (poichè il denominatore abolito sarebbe positivo) dal valore negativo al positivo, e ciò dice che si ha il minimo cono circoscritto quando l'altezza sua è eguale al doppio del diametro della sfera.

28. Problema II.° *Con un cartone rettangolare di lati* a *e* b *formare la scatola di massimo volume.*

Per formare la scatola occorre ritagliare agli angoli del rettangolo quattro quadrati eguali, e quindi se x è il lato di questi quadrati la base della scatola avrà per lati
$a - 2x$, $b - 2x$, e il suo volume è

$$V = x(a-2x)(b-2x) = abx - 2(a+b)x^2 + 4x^3 .$$

Occorre trovare il valore di x che rende massima questa espressione.

Eguagliando a zero la derivata, si ha

$$V' = 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0$$

da cui

$$x = \frac{1}{6}(a+b) \mp \frac{1}{6}\sqrt{a^2 + b^2 - ab} .$$

Sostituendo nella data equazione ad x il valore $\frac{b}{2}$ si ha per risultato $\quad 3b^2 - 2(a+b)b + ab = b(b-a)$,

che per $b < a$ è negativo; quindi delle due radici una è minore l'altra è maggiore di $\frac{b}{2}$. La maggiore è da scartarsi, perché assurda, e resta unica soluzione del problema

$$x_1 = \frac{1}{6}(a+b) - \frac{1}{6}\sqrt{a^2 + b^2 - ab} .$$

Ricordando che è $a > b$, si ha

$$x_1 = \frac{1}{6}(a+b) - \frac{1}{6}\sqrt{a^2 - b(a-b)}$$

valore che si diminuisce se si sopprime nel radicale $b(a-b)$, e quindi

$$x_1 > \frac{b}{6} ;$$

si ha invece

$$x_1 = \frac{1}{6}(a+b) - \frac{1}{6}\sqrt{b^2 + a(a-b)} ,$$

valore che aumenta se si sopprime nel radicale $a(a-b)$, quindi

$$x_1 < \frac{a}{6} ;$$

risulta quindi che la radice minore x_1 è sempre compresa fra $\frac{a}{6}$ e $\frac{b}{6}$. Se fosse $a = b$ sarebbe $x_1 = \frac{1}{6} a$.

29. Problema 12.° *Iscrivere in una data sfera il cono di massimo volume.*

Sia ABC la sezione del cono iscritto nella sfera fatta con un piano passante per l'asse; e sia x la sua altezza. Il raggio di base è

$$CD = \sqrt{x(2r-x)} ,$$

e quindi il volume del cono è

$$V = \frac{1}{3}\pi x(2r-x)x = \frac{1}{3}\pi x^2(2r-x) .$$

Il massimo volume si otterrà per i valori di x che rendono massimo il prodotto

$$x^2(2r-x) ;$$

e siccome in questo prodotto la somma dei fattori x, $2r-x$ è costante, si avrà il massimo quando

$$\frac{x}{2} = \frac{2r-x}{1} ,$$

cioè quando

$$x = \frac{4}{3} r .$$

Ma a ciò si poteva pervenire anche direttamente applicando la solita regola.

Infatti dev'essere

$$x_1^2(2r-x_1) - x_2^2(2r-x_2) = 0 ,$$

cioè

$$2rx_1^2 - x_1^3 - (2rx_2^2 - x_2^3) = 0 ,$$

ossia $$2r(x_1^2 - x_2^2) - (x_1^3 - x_2^3) = 0 ,$$

e sopprimendo il fattor comune $x_1 - x_2$,

$$2r(x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0 ;$$

ed eguagliando le variabili:

$$4rx - 3x^2 = 0 .$$

La quale equazione è soddisfatta da

$$x = 0 ,$$

per cui il cono si riduce al punto A, ed esso è naturalmente il minimo cono inscritto; oppure da

$$x = \frac{4}{3} r ,$$

pel quale valore la derivata passa dal valore positivo al negativo e quindi esso dà il cono di massimo volume inscritto alla sfera. Per costruirlo si divide il raggio della sfera in tre parti eguali, e a cominciare da A se ne pigliano quattro, e si avrà così il punto D richiesto.

30. Problema 13.° *Di tutti i segmenti sferici ad una base che hanno le calotte equivalenti trovare quello di volume massimo* *).

Indicando con x l'altezza del segmento sferico e con y il raggio della sfera, la superficie della calotta è data da $2\pi xy$ ed il volume è espresso da $\pi x^2 \left(y - \frac{x}{3} \right)$. Quindi, se πc^2 è l'area costante della calotta e V il volume del segmento, si ha

$$xy = \frac{c^2}{2} \quad , \quad V = \pi x^2 \left(y - \frac{x}{3} \right) ,$$

ed eliminando la y risulta

$$V = \pi \left(\frac{c^2 x}{2} - \frac{x^3}{3} \right) .$$

---

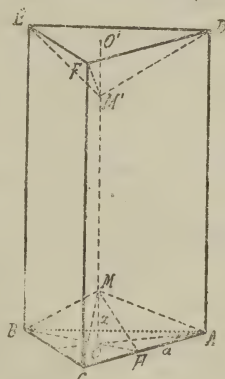
*) Problema risoluto da Archimede, nel 3° secolo a. C. con metodo geometrico puro nella prop. IX del libro II dell'opera: *Della sfera e del cilindro.*

Il valore di x che rende massimo il volume è lo stesso che rende massima la funzione $\frac{c^2 x}{2} - \frac{x^3}{3}$. Derivando si trova che deve essere

$$\frac{c^2}{2} - x^2 = 0 .$$

Sostituendo a $\frac{c^2}{2}$ il suo valore nella prima delle equazioni essa si riduce ad $x(y - x) = 0$.

Se $x = 0$, si ha il minimo segmento sferico di quella superficie, se $y = x$ si ha il massimo. Dunque il segmento sferico di volume massimo che ha quella data calotta è la *semisfera*.

31. Problema 14.° *Dato un prisma retto triangolare regolare* ABCDEF *di altezza* b, *e di lato di base* a, *trovare sulla congiungente i centri di gravità delle due basi due punti* M, M′, *equidistanti dalle basi, che congiunti con i vertici della base più vicina diano minima la somma dei triangoli* ABM, BCM, ..., DEM′, ... *che hanno i vertici in* M *o* M′, *e dei trapezii che hanno* MM′ *per base e le altre basi nelle costole laterali del prisma.*

Poniamo $OM = x$; ogni triangolo ha per base a e per altezza MH, quindi la somma delle aree è $3a \cdot \mathrm{MH}$, ogni trapezio ha per basi b e $b - 2x$, e per altezza OB, quindi la somma delle aree è $3\,(b - x)\,\mathrm{OB}$.

Dunque bisogna cercare il minimo di

$$3a \cdot \mathrm{MH} + 3\,(b - x)\,\mathrm{OB} .$$

Ma $\mathrm{OB} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{OH} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $\mathrm{MH} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{12}}$, dunque la funzione di cui si cerca il minimo si riduce a

$$3a\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{12}} + (b - x)\,a\sqrt{3} .$$

Il valore di x che rende minima questa espressione è quello

che rende minima

$$\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{12}}-x\,,$$

ovvero, moltiplicando per 2,

$$\sqrt{12x^2+a^2}-2x.$$

Applicando la solita regola deve essere

$$\left(\sqrt{12x_1^2+a^2}-\sqrt{12x_2^2+a^2}\right)-2\,(x_1-x_2)=0$$

Per fare apparire il fattore x_1-x_2 nella prima parentesi, consideriamola come espressione frazionaria e rendiamone razionale il numeratore, così l'equazione precedente si muta successivamente in

$$\frac{12(x_1^2-x_2^2)}{\sqrt{12x_1^2+a^2}+\sqrt{12x_2^2+a^2}}-(x_1-x_2)=0\,,$$

$$\frac{6(x_1+x_2)}{\sqrt{12x_1^2+a^2}+\sqrt{12x_2^2+a^2}}-1=0\,,$$

e posto $x_1=x_2=x$, in

$$\frac{6x}{\sqrt{12x^2+a^2}}-1=0\,.$$

Liberando da' fratti ed innalzando a quadrato si ha

$$36x^2-12x^2-a^2=0\,;$$

ovvero

$$24x^2-a^2=0\,,$$

e tralasciando la radice negativa

$$x=\frac{a}{2\sqrt{6}}\,.$$

Ciò si poteva anche avere derivando direttamente la funzione. Si può osservare che

$$BM=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{3}}=\frac{3a}{2\sqrt{6}}$$

Quindi il minimo della superficie cercata si ha per BM = 3OM.

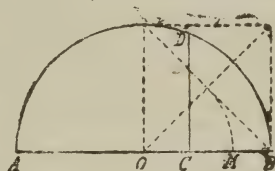
Questo è uno dei bellissimi esempi di *aree minime* che, per la teoria di Plateau, si ottengono con le lamine liquide pellicolari e se ne può rendere visibile e pratica l'esistenza, col fare il prisma con filo di ferro e bagnarlo nell'acqua saponata.

32. Problema 15.° *Sul diametro* AB *di un semicerchio di raggio* r *si prende un punto* C *e si eleva da esso la corda* CD *perpendicolare ad* AB. *Si cerca il massimo della funzione* y = AC + CD *).

Se si assume $AC = x$ per variabile indipendente risulta $y = x + \sqrt{x(2r - x)}$, e quindi il massimo o minimo valore di questa funzione si ha per

$$x_1 - x_2 + \sqrt{x_1(2r - x_1)} - \sqrt{x_2(2r - x_2)} = 0.$$

Col medesimo artifizio usato nell'esempio precedente questa equazione si muta successivamente in

$$x_1 - x_2 + \frac{2r(x_1 - x_2) - (x_1^2 - x_2^2)}{\sqrt{x_1(2r - x_1)} + \sqrt{x_2(2r - x_2)}} = 0,$$

$$1 + \frac{r - x}{\sqrt{x(2r - x)}} = 0, \qquad \sqrt{x(2r - x)} = x - r, \quad (1)$$

$$(x - r)^2 = x(2r - x),$$

$$2x^2 - 4rx + r^2 = 0.$$

$$x = r \mp \sqrt{\frac{r^2}{2}} = r \mp \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Come si poteva direttamente ottenere derivando la funzione $x + \sqrt{x(2r - x)}$.

Delle due radici soltanto la maggiore è radice della (1) perchè la minore radice rende il secondo membro negativo (cfr. III, **24**).

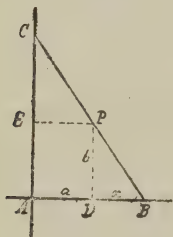
Quando x varia da 0 al r la funzione essendo somma di due parti crescenti è certamente crescente. Il prodotto $x(2r - x)$ è

*) Problema risoluto da Fermat (op. cit.).

massimo per $x = r$, e va diminuendo quando x varia da r a $2r$, quindi il radicale $\sqrt{x(2r - x)}$, che diventa eguale ad $x - r$ per $x = r + \frac{r\sqrt{2}}{2}$, è prima maggiore poi minore di $x - r$, e perciò la prima derivata è prima positiva poi negativa, e quindi la radice x_2 dà un valore massimo della funzione.

Nella figura è accennata la costruzione geometrica del punto M che dà il massimo richiesto.

Si potebbe anche ricondurre questo problema al problema 6° del n. **23**, osservando che il massimo di AC + CD coincide col massimo di OC + CD, e quindi di sen x + cos x.

33. Problema 16.° *Per un punto preso nell'interno di un angolo retto* BAC, *che disti* a, b *da' lati* AC *e* AB, *condurre tra i lati il minimo segmento.*

Si ponga DB $= x$, risulta AB $= x + a$,

$$EC = \frac{ab}{x}, \quad AC = \frac{ab}{x} + b .$$

$$BC^2 = (x + a)^2 + \left(\frac{ab}{x} + b\right)^2.$$

Applicando la solita regola deve essere

$$(x_1 + a)^2 - (x_2 + a)^2 + \left(\frac{ab}{x_1} + b\right)^2 - \left(\frac{ab}{x_2} + b\right)^2 = 0 ,$$

e scomponendo le differenze di quadrati in prodotti

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2a) + \left(\frac{ab}{x_1} - \frac{ab}{x_2}\right)\left(\frac{ab}{x_1} + \frac{ab}{x_2} + 2b\right) = 0 ,$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2$ e ponendo $x_1 = x_2 = x$ si ha successivamente

$$2x + 2a - 2\left(\frac{ab}{x} + b\right)\frac{ab}{x^2} = 0 ,$$

$$x + a - \left(\frac{a + x}{x}\right)\frac{ab^2}{x^2} = 0 ,$$

e ciò si sarebbe anche ottenuto derivando direttamente la funzione che rappresenta BC².

Quest'equazione si scinde in

$$x + a = 0 \quad , \quad 1 - \frac{ab^2}{x^3} = 0 \; .$$

Dalla prima si ha $x = -a$ e questo corrisponde certamente ad un minimo del segmento BC; dall'altra si ha

$$x = \sqrt[3]{ab^2}$$

che pure dà un minimo del segmento BC; però la prima posizione è posizione limite di un segmento che sta fra un lato dell'angolo e il prolungamento dell'altro, il secondo risponde alla questione com'è stata posta.

Se si prendesse come variabile l'angolo $PBA = \alpha$ si avrebbe

$$BC = \frac{b}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{a}{\cos \alpha} \; ,$$

ed applicando la regola solita deve essere successivamente:

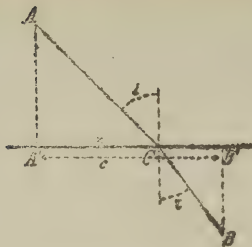
$$\frac{b(\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1)}{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{a(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} \; ,$$

$$\frac{b \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \cos \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)}{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{a \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} \; ;$$

$$\frac{b \cos \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)}{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{a \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} \; ,$$

e posto $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$\frac{b \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\cos^3 \alpha} \; , \quad \text{donde si deduce} \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \; .$$

34. Problema 17.° *Supposto che un raggio di luce debba passare da A a B attraverso due mezzi omogenei di diversa densità separati dalla retta A'B', trovare in qual punto C esso deve attraversare la linea A'B' affinchè il tempo impiegato sia minimo.*

Posto $AA' = a$, $BB' = b$, $A'B' = c$, $A'C = x$, si ha $AC = \sqrt{x^2 + a^2}$, $CB = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$ e quindi, se u e v sono le velocità della luce nei due mezzi, il tempo impiegato da essa a passare da A a B è

$$\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}}{v}.$$

Applicando il metodo solito a questa funzione si ha che deve essere

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + a^2}}{u} - \frac{\sqrt{x_2^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c - x_1)^2 + b^2}}{v} - \frac{\sqrt{(c - x_2)^2 + b^2}}{v} = 0,$$

ovvero

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{u\left(\sqrt{x_1^2 + a^2} + \sqrt{x_2^2 + a^2}\right)} + \frac{(c - x_1)^2 - (c - x_2)^2}{v\left(\sqrt{(c - x_1)^2 + b^2} + \sqrt{(c - x_2)^2 + b^2}\right)} = 0,$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2 = (c - x_2) - (c - x_1)$ e posto $x_1 = x_2 = x$ risulta

$$\frac{1}{u} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{v} \frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}};$$

come si sarebbe ottenuto se si fosse applicata direttamente la regola della derivazione. Se con i ed r indichiamo gli angoli di *incidenza* e di *rifrazione* si ha che deve essere

$$\frac{\text{sen}\, i}{u} = \frac{\text{sen}\, r}{v}.$$

Ma questa legge si avvera in fatto *), dunque resta dimostrato che *la luce impiega il minor tempo possibile per passare da* A *a* B.

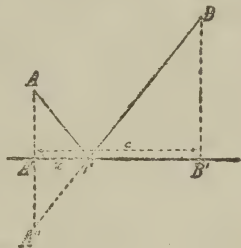
35. Problema 18° *Dati due punti* A *e* B *situati dalla stessa banda di una retta trovare su questa retta un punto* C *tale che la somma* AC + CB *sia minima.*

Siano a, b le distanze AA′, BB′ di A e B dalla retta e c la distanza A′B′. Indicando con x la distanza A′C si ha

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2} \quad , \quad CB = \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

e quindi

$$AC + CB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2} .$$

Applicando la regola di Fermat-Monforte, oppure derivando direttamente, si trova che per essere massima o minima la funzione deve essere

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} ,$$

cioè deve essere

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{B'C}{BC} , \qquad \text{ovvero} \quad \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B$$

e quindi l'angolo ACA′ = BCB′, e perciò il punto cercato è l' intersezione della retta A′B′ con la retta A″B che congiunge B col simmetrico di A rispetto ad A′B′.

Geometricamente, la linea spezzata AC + CB = A″C + CB, e quindi, per esser minima, il punto C deve essere allineato con A″ e B.

Un raggio luminoso, che da A per riflessione sulla retta A′B′

*) Questa legge di rifrazione fu intuita da Villebrord Snellius e dimostrata da René Descartes nella sua *Diottrica* basandosi sull'ipotesi che la luce si propagasse istantaneamente. La dimostrazione fu impugnata da Fermat che a sua volta la dimostrava col metodo qui riportato, e questo modo parve non conveniente, poiché ammetteva come assioma che la luce non è istantanea e che la natura impiega nelle sue esplicazioni il principio della minima azione. Dopo una polemica che durò moltissimi anni Fermat conchiuse che egli si dava per vinto a patto che il suo errore si ponesse fra quelli che hanno tutta l'apparenza della verità!

passi per B, fa precisamente l'angolo d'incidenza eguale all'angolo di riflessione, e quindi si conferma che la luce percorre il minimo cammino per passare da A a B con raggio riflesso.

Se si assumono per variabili gli angoli $\alpha = ACA'$, $\beta = BCB'$, si avrà

$$AC = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} \quad , \quad BC = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \; ;$$

e quindi occorre cercare il minimo di $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}$, e per la regola nota deve essere

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha_1} - \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha_2} - \left(\frac{b}{\operatorname{sen}\beta_2} - \frac{b}{\operatorname{sen}\beta_1}\right) = 0 \tag{1}$$

con la condizione $a\cot\alpha_1 + b\cot\beta_1 = c = a\cot\alpha_2 + b\cot\beta_2$, cioè

$$a(\cot\alpha_1 - \cot\alpha_2) = b(\cot\beta_2 - \cot\beta_1) \; . \tag{2}$$

Dalla (1) si ha

$$\frac{a(\operatorname{sen}\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1)}{\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{b(\operatorname{sen}\beta_1 - \operatorname{sen}\beta_2)}{\operatorname{sen}\beta_1 \operatorname{sen}\beta_2} \; ,$$

e dividendola per la (2) si ha

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\operatorname{sen}\beta_1 - \operatorname{sen}\beta_2}{\operatorname{sen}(\beta_1 - \beta_2)} \; ,$$

e trasformando

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\cos\frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\cos\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)\cos\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)\cos\frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)} \; ;$$

e riducendo e posto $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ si ha

$$\cos\alpha = \cos\beta \; ,$$

$$\alpha = \beta \; .$$

36. Applicazioni a massimi e minimi di funzioni di più variabili.

Problema 19.° *Trovare il massimo del prodotto di più variabili che hanno la somma costante.*

Supponiamo per brevità che le variabili siano tre, x, y, z, e che sia a la loro somma, sarà $z = x - a - y$, e quindi occorre trovare il massimo del prodotto

$$xy(a - x - y) .$$

Supposto variabile la x soltanto, ed applicando direttamente la regola di Fermat-Monforte, deve essere

$$x_1y(a - x_1 - y) - x_2y(a - x_2 - y) = 0 ,$$

e sottraendo ed aggiungendo $x_1y(a - x_2 - y)$ si ha

$$x_1y(a-x_1-y)-x_1y(a-x_2-y)+x_1y(a-x_2-y)-x_2y(a-x_2-y)=0 ,$$

ovvero

$$x_1y(x_2 - x_1) + (x_1 - x_2)y(a - x_2 - y) = 0 ,$$

e sopprimendo il fattor comune $x_1 - x_2$ risulta

$$x_1y - y(a - x_2 - y) = 0 ,$$

e posto $x_1 = x_2 = x$, e sopprimendo il fattore y, che eguagliato a zero risponde ad un minimo, si ha

$$x = a - x - y ,$$

come si sarebbe ottenuto derivando il prodotto rispetto alla variabile x.

Supposto variabile la sola y si ha analogamente

$$y = a - x - y ,$$

e quindi risulta

$$x = y = a - x - y ;$$

cioè il prodotto è massimo quando le variabili sono eguali fra loro.

L'interpretazione geometrica di questo problema è la seguente: *Di tutti i parallelepipedi rettangoli che hanno costante la somma degli spigoli il cubo ha il volume massimo.*

37. Problema 20.° *Trovare fra tutti i triangoli di eguale perimetro qual'è quello di area massima.*

Occorre che sia massima l'espressione

$$\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \, .$$

Quest'espressione diviene massima quando sarà massimo il prodotto dei fattori·

$$(p-x)(p-y)(p-z) \, .$$

Ma questi fattori hanno la somma costante p.

Dunque devono essere eguali fra loro i fattori, cioè il triangolo devo essere *equilatero.*

38. Problema 21.° *Trovare la minima somma di più variabili che hanno il prodotto costante* p.

Supponiamo per brevità che le variabili siano tre, x, y, z, e che sia p_3 il loro prodotto, sarà $z=\frac{p^3}{xy}$, e quindi occorre cercare il massimo della somma

$$x+y+\frac{p^3}{xy} \, \cdot$$

Supposto variabile la sola x, deve essere

$$x_1+y+\frac{p^3}{x_1 y}-\left(x_2+y+\frac{p^3}{x_2 y}\right)=0 \, ,$$

ovvero

$$x_1-x_2+\frac{p^3}{y}\cdot\frac{x_2-x_1}{x_1 x_2}=0 \, ,$$

e successivamente

$$1=\frac{p_3}{x_1 x_2 y} \quad , \quad 1=\frac{p^3}{x^2 y} \quad , \quad \frac{p^3}{xy}=x \, .$$

Analogamente supposto variabile la sola y si avrebbe

$$\frac{p^3}{xy} = y \, ,$$

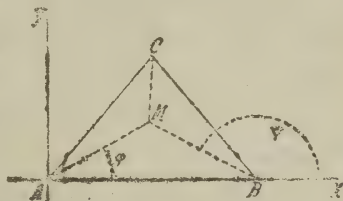
e quindi risulta

$$x = y = \frac{p^3}{xy} \, .$$

La somma è minima quando le variabili sono uguali fra loro.

L'interpretazione geometrica di questo problema è la seguente: *Di tutti i parallelepipedi rettangoli che hanno un determinato volume il cubo è quello che ha minima la somma degli spigoli.*

39. Problema 22.° *Trovare nel piano di un triangolo il punto di cui le distanze dai vertici del triangolo hanno una somma minima* *).

Del triangolo ABC sia c il lato AB, siano $x_0 y_0$ le coordinate di C rispetto ad AB ed alla retta AY ad essa perdendicolare ed x, y le coordinate di M: la funzione di cui si richiede il minimo è

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x-x_0)+(y-y_0)^2}$$

Consideriamo variabile la sola x e troviamo che una delle condizioni di massimo si ricava da

$$\sqrt{x_1^2+y^2} - \sqrt{x_2^2+y^2} + \sqrt{(x_1-c)^2+y^2} - \sqrt{(x_2-c)^2+y^2} +$$
$$+ \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y-y_0)^2} - \sqrt{(x_2-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0 \, ,$$

della quale eseguendo le solite trasformazioni, o anche derivando direttamente la dato funzione, si deduce che deve essere

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0 \, .$$

Analogamente considerando come variabile la sola y, si trova

*) Problema proposto da Fermat e risoluto da Bonaventura Cavalieri (1598-1647), prof. dell' Università di Bologna, nella sesta delle sue *Exercitationes geometricae sex* (proposizioni 23, 24, 25, p. 504-508, Bologna 1647) con dimostrazione geometrica diretta.

che un'altra condizione di massimo è

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x-c)^2-y^2}}+\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0 .$$

Ora indicando con φ, ψ, ω gli angoli che le direzioni AM, BM, CM formano con la direzione positiva dell'asse AX si ha

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \operatorname{sen}\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} ,$$

$$\cos\psi=-\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} \quad , \operatorname{sen}\psi=\frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}$$

$$\cos\omega=\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \quad , \operatorname{sen}\omega=\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} ,$$

e quindi le condizioni precedenti si mutano in

$$\cos\varphi+\cos\psi+\cos\omega=0 ,$$
$$\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\psi+\operatorname{sen}\omega=0 ,$$

ed eliminando ω

$$(\cos\varphi+\cos\psi)^2+(\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\psi)^2=1 ,$$

ovvero successivamente

$$1+2(\cos\varphi\cos\psi+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi)=0 ,$$
$$1+2\cos(\varphi-\psi)=0 ,$$
$$\cos(\varphi-\psi)=-\frac{1}{2} ,$$
$$\varphi-\psi=120^0$$

e quindi occorre che l'angolo AMB sia di 120 gradi

Analoga condizione si ritroverebbe per gli angoli BMC, CMA, se si eliminasse φ o ψ, dunque perché il punto M soddisfi alla condizione voluta occorre che gli angoli AMB, BMC, CMA siano eguali fra loro e perciò il punto M è intersezione degli archi capaci di contenere un angolo inscritto di 120^0 descritti sulle corde AB, BC, CA.

Si può direttamente vedere che se uno degli angoli del triangolo ABC è di 120^0 o dippiù il vertice di questo angolo è quello che soddisfa al problema.

Esercizi.

Trovare i massimi e minimi delle seguenti funzioni:

1. $y = 5x^2 - 10x + 6.$
2. $y = 3x^2 - 5x + 7.$
3. $y = -3x^2 + 5x - 4.$
4. $y = 4x^2 - 3x - 9.$
5. $y = x^2 - (a+1)x - a^2.$
6. $y = px^2 + (p-q)x + pq.$
7. $y = (p^2 - q^2)x^2 + (p^2 + q^2)x + 6.$
8. $y = (m+1)x^2 - (m^2+1)x + m.$
9. $y = (a-b)x^2 - (a^2+b^2)x + 4ab.$
10. $y = x^3 - 3x + 7.$ (R. $x = -1$, $x = +1$).
11. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1.$ (R. $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$).
12. $y = 6x^3 - 43x^2 + 100x - 75.$
13. $y = x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$
14. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 6.$
15. $y = x^4 - 8x^2 - 3.$
16. $y = x^4 - (a^2+1)x^2 - 3a^4.$
17. $y = (25x^2 - 9)(2x - 3).$
18. $y = (2x+3)^2(x-5)(x+4).$
19. $y = x - x^n.$
20. $y = (a-1)x^4 - 2ax^2 + (a-1).$
21. $y = \frac{x^2}{2a}\left(2a - \frac{x^2}{a}\right).$
22. $y = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - 3a^3x + 2a^4.$
23. $y = x\sqrt{x}\sqrt{1-x^3}.$
24. $y = x^4(4a^2 - x^2).$
25. $y = x^2 + \frac{a^3}{x}.$
26. $y = \frac{x^4 + a^4}{x^4}.$
27. $y = m\sqrt{a^2 + x^2} - nx.$
28. $y = \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x}{2} - 1.$ $\left(\text{R. } x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}},\ y = \mp\frac{a\sqrt{3}}{2} - 1\right).$

29. Dividere un segmento AB in due parti AC, CB in modo che $AC^3 \cdot CB$

30. Determinare m in modo che sia minima la somma dei quadrati delle radici dell'equazione $x^2 + (2 - m)(x + m - 3) = 0.$

— Determinare i valori massimi e minimi della y delle seguenti funzioni implicite e trovarne le rappresentazioni geometriche:

31. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. (Si risolva rispetto ad y e si ponga la derivata eguale a zero). (R. $y = 8$, $y = -2$).

32. $x^2 - 5xy + 3y^2 - 2y - 6 = 0$.

33. $2x^2 - 5xy - 2y^2 - x - 3y + 4 = 0$.

34. $7x^2 + 2xy + 3y^2 + 8x - 2y + 2 = 0$.

35. $x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 1 = 0$.

36. Determinare il valore di k pel quale il trinomio in x,

$$kx^2 + (k-1)x + (k-2) ,$$

abbia il suo massimo o minimo eguale al minimo della somma dei quadrati dei suoi coefficienti; oppure eguale al minimo della somma dei prodotti dei coefficienti a due a due.

37. Determinare il valore di k pel quale il trinomio in x,

$$x^2 - 2(k+1)x - (2k-3) ,$$

abbia il suo massimo o minimo eguale alla somma dei quadrati delle sue radici; oppure alla somma delle sue radici aumentate del loro prodotto.

— Determinare i valori massimi e minimi delle seguenti funzioni, discuterle e farne il diagramma:

38. $y = \dfrac{-2x+1}{3x^2-5}$.

39. $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-8}$. $\left(\text{R. } x = 10 \mp 6\sqrt{2}\right)$.

40. $y = \dfrac{3x^2+13x+2}{5x^2+20x+4}$. $\left(\text{R. } x = 2 \text{ , } -\dfrac{6}{5}\right)$.

41. $y = \dfrac{x^2+7x+1}{x^2-3x+2}$.

42. $y = \dfrac{2x^2+5x-6}{-2x^2+x+1}$.

43. $y = \dfrac{3x^2+2x+5}{4x^2+3x+5}$. $\left(\text{R. } x = -\dfrac{33}{74} \text{ , } \dfrac{17}{2}\right)$.

44. $y = \dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$. (R. $x = 3$, 1) .

45. $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. (R. $x = -1$, $x = +1$) .

46. $y = \dfrac{2x^2+2\sqrt{2}\,x-1}{3x^2+1}$. $\left(\text{R. } x = \sqrt{2} \text{ , } x = -\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)$.

47. $y = \dfrac{2x^2+3}{{}^2-3x+2}$.

48. $y = \dfrac{x^2+4x+1}{x^2-4x-1}$.

49. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

50. $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

51. $y = \dfrac{x-3}{x^2+5}$.

52. $y = \dfrac{x^2+2}{x-3}$.

53. $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+1}$.

54. Trovare i valori massimi e minimi di $y = x + \dfrac{p}{x}$ *).

55. » » » » $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{b'x+c'}$.

56. » » » » $y = \dfrac{1}{a'x^2+b'x+c'}$.

57. Determinare il valore massimo o minimo della funzione

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x .$$

58. Determinare il massimo di $\dfrac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2\, a}{1+\operatorname{tg}^2 {}^1\!/_2\, a}$. (R. $a = 90^0$).

59. Determinare della funzione $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\operatorname{sen}^2 x}$ il valore massimo o minimo.
(R. $y = 0$ minimo per $\operatorname{sen} x = 0$).

60. Trovare il valore minimo di $y = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^3 x}$ per x variabile fra 0 e 30^0.

(La funzione si trasforma in $y = \dfrac{3-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg}^4 x}$, R. $y^2-34y+1 \geqq 0$).

61. Per quali valori di k la funzione $\dfrac{x-k}{x^2-3x+2}$ ha un massimo ed un minimo?

62. Id. per la funzione $\dfrac{x^2-4}{x^2+2kx-1}$.

63. Determinare a e b nella funzione $ax+\dfrac{b}{x}$ in modo che per $x=m$ essa abbia per minimo p.

---

*) Si può dimostrare che la curva che rappresenta questa funzione ha per asintoto la bisettrice dell'angolo XOY.

64. In un quadrato inscrivere il minimo quadrato.

65. Due triangoli isosceli descritti sulla stessa base sono inscritti nella stessa circonferenza, determinare la condizione perché la differenza delle loro aree sia massima.

66. Qual'è il raggio del cerchio nel quale ad un arco di lunghezza data $2a$ corrisponde il segmento minimo? $\left(\text{R. } \cos\frac{a}{x}\left(a\cos\frac{a}{x} - x \operatorname{sen}\frac{a}{x}\right)=0\right)$.

67. Inscrivere in un emisfero un cilindro di massimo volume.

68. Determinare il cilindro di massima superficie laterale inscritto in una sfera. (R. Altezza $x = r\sqrt{2}$).

69. Trovare fra i cilindri di rotazione di superficie equivalente a $2\pi a^2$ quale è quella di volume massimo. (R. $h = 2r$).

70. Trovare il massimo trapezio inscritto in un semicerchio.
(Se $2x$ è la base, ed y è l'altezza l'area del trapezio è

$S = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}$ R. Base variabile = raggio; $S = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$).

71. Un cono equilatero è inscritto in una sfera. Tagliare questi due corpi con un piano parallelo alla base del cono in modo che la differenza fra le due sezioni sia massima. (R. Distanza del piano dal centro $= \frac{3}{4} r$).

72. Di tutti i cilindri generati da' rettangoli di perimetro costante nella rotazione intorno ad un lato determinare il massimo.

73. In una sfera data inscrivere il cono di massima superficie laterale.
(R. Altezza $x = \frac{4}{3} r$).

74. In una sfera data inscrivere il cilindro di massima superficie totale.
$\left(\text{R. raggio di base } x = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right)$.

75. In un cono inscrivere il massimo cilindro.
(R. Se è x altezza del cilindro a altezza del cono; $x = \frac{4}{3} a$).

76. Determinare il rapporto che deve esservi fra l'altezza e il raggio di base di un cilindro perché con un dato volume πa^3 esso abbia la superficie totale minima.

77. Determinare fra i coni di eguale apotema quello che ha il volume massimo. (R. $r : h = \sqrt{2}$).

78. Determinare fra i cilindri di eguale superficie quello di volume massimo. (R. Il cil. equilatero).

79. Determinare il minimo cono, o il cono di minima superficie laterale circoscritto ad un'emisfera. (R. Altezza $y = r\sqrt{3}$).

80. Determinare fra i cilindri retti equivalenti quello inscritto nella minima sfera.

81. Trovare su una retta un punto che abbia minima la somma dei quadrati delle sue distanze da due punti fissi.

82. Determinare il cilindro di massima superficie laterale inscritto in un cono.

83. Determinare il cilindro di massimo volume inscritto in un cono.

84. Per un punto dato nell'interno di un angolo retto condurre una trasversale che ne stacchi il minimo triangolo.

85. Tra i lati di un angolo condurre il minimo segmento che ne stacchi un triangolo di data superficie.

86. Determinare il volume massimo che si può generare da un triangolo isoscele inscritto in un dato cerchio rotando intorno alla base.

(R. Altezza $x = \frac{5}{3} r$).

87. Segare una sfera in modo che la differenza dei coni inscritti nei due segmenti sia massima. $\left(\text{R. } x \text{ distanza del piano del centro } = \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)$.

88. Essendo dati due cerchi (O), (O') che si tagliano in A, condurre per A la segante comune tale che il prodotto delle due parti staccate su di essa dalle circonferenze sia massima.

(Si prenda come variabile l'angolo della trasversale con uno dei raggi OA, l'altro sarà noto.

R. La segante deve essere egualmente inclinata ai raggi OA, O'A.

89. In una sfera inscrivere il cono di massima superficie totale.

$\left(\text{R. } x \text{ altezza} = \frac{r}{16}(23 - \sqrt{17})\right)$.

(Prendendo per incognita x la distanza di un punto della circonferenza di base dal punto diametralmente opposto al vertice, si ha più facilmente $x = \frac{r}{4}\left(1 \pm \sqrt{17}\right)$.

90. Determinare la posizione di un punto di un lato di un angolo retto da cui siano visti sotto angolo massimo due punti dell'altro lato.

91. Un rettangolo con le semicirconferenze descritte su due lati opposti esternamente ad esso rota intorno alla congiungente i centri delle semicirconferenze. Supposto costante il perimetro della figura, trovare quali devono essere i lati del rettangolo perché sia massima la superficie totale del solido che risulta.

92. In un ottaedro regolare inscrivere il massimo parallelepipedo rettangolo.

93. Determinare il massimo prodotto delle tangenti di due archi x e y di cui la somma è costante e $< \frac{\pi}{2}$. (R. $x = y$).

94. Determinare il minimo triangolo rettangolo che si possa costruire con i vertici su tre parallele.

95. Essendo date le parallele AB, CD tagliate dalla trasversale AD, condurre per B una trasversale che segando AD in X, DC in Y faccia risultare minima la somma dei triangoli AXB e DXY (Viviani). Interpretare la soluzione negativa.

96. Si domanda da qual punto del segmento che congiunge i centri di due sfere, esterne l'una all'altra, la somma delle calotte visibili è massima.

$$\left(\text{R. } x = a \frac{r^{3/2}}{r^{3/2} + r'^{3/2}}\right).$$

97. Determinare il massimo volume del solido inscritto in una sfera formato da un cilindro e da' due coni esterni aventi le stesse basi del cilindro.

98. Un cono è circoscritto ad una sfera ed un altro cono è inscritto alla sfera ed al primo cono. Determinare la condizione perché la differenza dei due coni sia minima. (Prendendo per x la distanza del centro dalla base del cono interno si ha $x = -r$, $x = \frac{2}{3} r$).

La derivata viene di 6^0 grado scomponibile in una equazione di 2^0 grado ed una equazione di 4^0 grado a radici imag. $x^4 - 2rx^3 + 2r^2x^2 + r^4 = 0$).

99. Un cono retto è circoscritto ad una semisfera ed un altro cono retto è inscritto al primo ed alla semisfera. Determinare la condizione che occorre affinché la differenza dei due coni sia minima.

(Se x è l'altezza del cono intero $(3x^2 - r^2)(x^6 - 2x^4r^2 + r^4x^2 + r^6) = 0$).

100. Due mobili si muovono con moto uniforme sui lati di un angolo retto, con velocità v e v'. In un dato istante le loro distanze dal vertice dell'angolo retto sono a e b; trovare in quale istante la loro distanza sia minima.

101. Inscrivere in una sfera di raggio r un cilindro di massimo volume.

$$\left(\text{R. La metà dell'altezza del cilindro } x = \frac{r}{\sqrt{3}}\right).$$

102. Di tutti i coni di superficie laterale data πa^2 determinare quello di volume massimo. (R. Se y è l'altezza, x il raggio, $y = x\sqrt{2}$).

103. Determinare per quali valori di α si ha il massimo ed il minimo del volume generato dalla rotazione di un rettangolo di lati a e b intorno ad un asse che passi per un vertice, sia esterno ad esso, e formi l'angolo α con uno dei lati. (R. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, oppure quando il centro di gravità è alla maggior distanza dall'asse).

104. Di tutti i coni aventi per vertice l'estremo di un segmento $AB = a$ e siano circoscritti ad una sfera di raggio variabile e centro fisso nell'altro estremo del segmento e sono limitati al cerchio di contatto, qual'è quello di volume massimo?

$$\left(\text{R. } x = \frac{a}{\sqrt{3}}\right).$$

105. Idem. Qual'è quello di superficie totale massima? $\left(\text{R. } x = \frac{a + a\sqrt{17}}{8}\right)$.

106. Di tutti i triangoli rettangoli di perimetro $2p$ trovare qual'è quello che ha massima la somma a dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.

107. Su una retta XY da una stessa parte sono poggiati un cerchio tan-

gente di raggio r, e un triangolo ABC di base a ed altezza $=3r$; una parallela ad XY sega il cerchio e il triangolo in una corda DE e una trasversale FG; trovare il massimo e il minimo della funzione DE^2+FG^2, e le variazioni di questa funzione.

(R. Se $a^2 < 12r^2$, si ha un massimo; in altri casi no).

108. Determinare il massimo rettangolo inscritto in un settore circolare dato mediante il raggio e la corda del suo arco. (Per inscrivere in un settore circolare un rettangolo simile ad un dato basta costruire il rettangolo sulla corda dalla parte opposta al centro e proiettarne i vertici rimanenti sull'arco dal centro. Si prenda per x l'altezza del rettangolo costruito sulla corda.

R. I quattro vertici del rettangolo ed il suo baricentro dovranno essere proiettati dal centro con raggi che formano angoli eguali fra loro).

109. Determinare il tronco di cono di massima superficie inscritto in un emisfero.

$$\left(\text{R. Se } 2\alpha \text{ è l'angolo al vertice del cono, } \operatorname{sen}\alpha = \frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right).$$

110. Determinare il massimo di $P = x^m y^n z^p \ldots$, supposto $x+y+z+\ldots = a$. (Si ricorra al problema 19°, n. **36** del Cap. VIII). $\left(\text{R. } \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}\right)$.

111. Determinare il massimo di $P = x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}} z^{\frac{r}{s}} \ldots$, essendo $x+y+z+\ldots = \text{cost.}$ (Si ricorra all'eserc. precedente). $\left(\text{R. } \frac{x}{m/n} = \frac{y}{p/q} = \frac{z}{r/s}\right)$.

112. Determinare il massimo di $xyz\ldots$, supposto $x^m+y^n+z^p+\ldots = a$. (Si ricorra al problema 19°, n. **36**). (R. $x=y=z=\ldots$).

113. Determinare il massimo di $x+y+z+\ldots$, supposto $x^2+y^2+z^2+\ldots = a$.

(R. $x=y=z=\ldots$).

114. Determinare il minimo di $x^2+y^2+z^2+\ldots$, supposto $x+y+z+\ldots = a$.

(R. $x=y=z=\ldots$).

115. Determinare il minimo di $x^n+y^n+z^n\ldots$, supposto che sia $xyz\ldots = p$.

(R. $x=y=z=\ldots$).

116. Determinare il minimo di $x+y+z\ldots$, supposto che sia $x^m y^n z^p \ldots = P$.

$$\left(\text{R. } \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \ldots\right).$$

117. Determinare il massimo parallelepipedo rettangolo che abbia una data superficie. (R. Il cubo).

118. Determinare il parallelepipedo di minima superficie che abbia un volume dato. (R. Il cubo).

119. Determinare fra i parallelepipedi rettangoli inscritti in una sfera quello di volume o di superficie massima.

120. In un bigliardo, con una palla A che è situata comunque in una

posizione data, e dopo due rimbalzi fatti eseguire su due mattonelle successive si vuole colpire un'altra palla B posta comunque sul piano in posizione pure data. Trovare quale è il più corto cammino che può percorrere la palla A.

121. Trovare per quali valori di x ed y la funzione

$$z = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

assume il massimo o il minimo valore.

CAPITOLO NONO.

DISCUSSIONI DI EQUAZIONI E DI PROBLEMI DI 2° GRADO.

§ 1. — Discussioni di equazioni contenenti un parametro.

1. Dicesi *parametro* di un'equazione una *variabile* che possa assumere tutti i valori numerici possibili reali. Qui prenderemo ad esaminare e discutere le equazioni ad una incognita che contengono un solo parametro (esse sono in sostanza funzioni a due variabili); oppure, equazioni che contengano due parametri in forma omogenea, sicché possa assumersi come unico parametro il loro rapporto.

Nel discutere della realtà o dei segni delle radici di una equazione, al variare del parametro, occorre tener conto delle variazioni che subiscono i coefficienti dell'equazione e delle funzioni che da esso dipendono, come si vedrà nei seguenti esempii.

2. Discussione di equazioni di 1° grado.

1.° *Discutere l'equazione* $(m - 3)\,x - (m - 5) = 0$.

Qualora sia $m \neq 3$, dividendo per $m - 3$ si ha:

$$x = \frac{m-5}{m-3}.$$

E questo valore di x sarà positivo, negativo o nullo a seconda del valore che assume $\dfrac{m-5}{m-3}$ al variare del parametro m.

Tenendo presente quanto è detto nel n.° 17 del Cap. III, il valore di x sarà positivo per i valori di m esterni all'intervallo $(3, 5)$, esclusi gli estremi, sarà negativo per i valori di m interni all'intervallo $(3, 5)$, esclusi gli estremi, sarà nullo per $m = 5$, e non avrà alcun valore numerico per $m = 3$.

Qualora ogni valore di m ed il corrispondente valore di x si

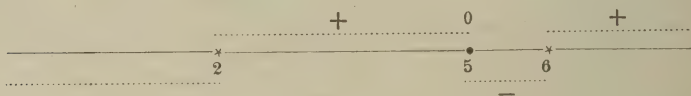
assumono come *ascissa* e *ordinata* di un punto del piano, la suddetta equazione rappresenta una *iperbole equilatera* (Cap. VI, **23**) che taglia l'asse OX delle x nel punto $+\frac{5}{3}$, l'asse OM delle m nel punto $+5$, ed ha un *asintoto* verticale nel punto $+3$, ed un asintoto orizzontale nel punto $+1$. Il ramo a sinistra della curva è tutto al disopra dell'asse delle ascisse OM.

2.° *Discutere l'equazione* $(m^2 - 8m + 12)x - (3m - 15) = 0$.

Supposto $m^2 - 8m + 12 \neq 0$ si ha $x = \frac{3m - 15}{m^2 - 8m + 12}$, quindi la radice è zero per $m = 5$, e non esiste affatto per $m = 2$, o a 6, cioè per i due valori di m, che annullano il denominatore.

La radice sarà positiva per i valori di m che soddisfano i sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} 3m - 15 > 0 \\ m^2 - 8m + 12 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3m - 15 < 0 \\ m^2 - 8m + 12 < 0 \end{cases};$$

cioè pel primo sistema per $m > 6$, e pel secondo sistema per i valori di m interni all'intervallo $(2, 5)$.

La radice sarà negativa per i valori di m che soddisfano i sistemi

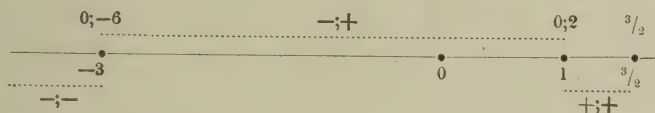
$$\begin{cases} 3m - 15 < 0 \\ m^2 - 8m + 12 > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3m - 15 > 0 \\ m^2 - 8m + 12 < 0 \end{cases}$$

cioè pel primo sistema per $m < 2$, e pel secondo sistema per i valori di m interni all'intervallo $(5, 6)$.

La curva rappresentata da questa equazione (*curva di 3° ordine*) ha due asintoti verticali che tagliano nei punti 2 e 6 l'asse OM delle ascisse, ed un asin oto orrizzontale nell'asse OM, ed è formata di 3 rami; il primo a sinistra tutto al disotto dell'asse OM, il secondo che sega l'asse della m nel punto 5, il terzo tutto al disopra dell'asse OM.

3. Discussione di equazioni di 2° grado.

1.° *Discutere l'equazione* $x^2 - 2kx + (k^2 + 2k - 3) = 0$.

Risolvendola si ha $x = k \mp \sqrt{3 - 2k}$, e quindi perché le radici siano reali occorre che sia $3 - 2k \geqq 0$, il che avviene per tutti i valori di $k \leqq {}^3/_2$. Il termine noto è un trinomio che ha per radici $-3, 1$, ed è negativo per i valori di k interni allo intervallo $(-3, 1)$ e positivo per i valori di k esterni ad esso. Il coefficiente del secondo termine si annulla per $k = 0$. Disposti questi valori in ordine crescente (come è indicato dalla figura) occorre esaminare gli intervalli $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 1)$, $(1, {}^3/_2)$.

Nell'intervallo $(-\infty, -3)$, i segni dell'equazione sono $+ + +$, non presentano variazioni, quindi le due radici dell'equazione sono entrambe negative; nel punto -3, una della radice diviene 0, l'altra $= -6$.

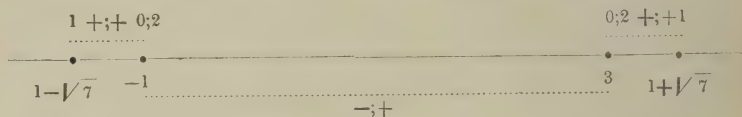
Nell'intervallo $(-3, 1)$, il termine noto è negativo, quindi le due radici sono di segno contrario, e divengono opposte per $k = 0$; mentre nell'estremo 1, divengono l'una 0, l'altra positiva $= 2$.

Nell'intervallo $(1, {}^3/_2)$, i segni dell' equazione sono $+ - +$, presentano due variazioni, quindi le radici sono entrambe positive. Divengono eguali a ${}^3/_2$ nel punto ${}^3/_2$, poi divengono complesse a destra di ${}^3/_2$.

La curva rappresentata da questa equazione è una *parabola*, essa taglia l'asse delle ascisse OK nei punti -3, e 1, e tocca la verticale condotta nel punto $+\frac{3}{2}$ alla distanza $\frac{3}{2}$ dal detto asse.

2.° *Discutere l'equazione* $3x^2 - 6x + (k^2 - 2k - 3) = 0$.

Risolvendola si ha $x = \frac{3 \mp \sqrt{-3(k^2 - 2k - 6)}}{3}$, e perché le radici siano reali occorre che sia $-(k^2 - 2k - 6) \geqq 0$, il che avviene per i valori interni all'intervallo $(1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7})$ compresi gli estremi. Il termine noto è un trinomio che ha per radici $-1, 3$,

e quindi è positivo per i valori esterni all'intervallo $(-1, 3)$ ed è negativo per i valori interni ad esso, occorre quindi tener conto dei quattro valori $1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}, -1, 3$, e siccome questi quattro valori sono disposti nell' ordine che si vede nella figura, risulta che le radici della data equazione sono eguali

ad 1 per $k = 1 - \sqrt{7}$, sono entrambe positive nell' intervallo $\left(1-\sqrt{7}, -1\right)$; sono una eguale a 0 l'altra eguale a 2 per $m = -1$; sono una positive e l'altra negativa nell' intervallo $(-1, 3)$: una eguale a 0 l'altra eguale a 2 per $m = 3$; entrambe nuovamente positive nell' intervallo $\left(3, 1+\sqrt{7}\right)$, ed eguali a 1 nel punto $1+\sqrt{7}$.

Per tutti gli altri intervalli le radici sono complesse.

La curva rappresentata da questa equazione è detta *ellisse*, essa taglia l'asse OK nei punti -1 e 3, e tocca le due verticali condotte dai punti $1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}$ alla distanza 1 dall'asse stesso.

3.° *Discutere l' equazione* $(m-5)x^2 + (m+2)x + (m-4) = 0$.

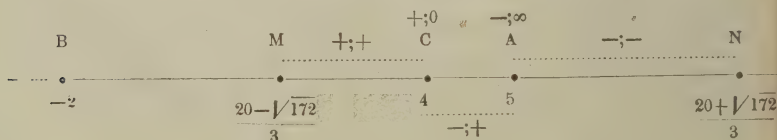
Risolvendola si ha $x = \dfrac{-(m+2) \mp \sqrt{-3m^2+40m-76}}{2m-10}$, e perché queste radici siano reali deve essere $-(3m^2-40m+76) \geqq 0$, il che avviene per i valori di m interni all' intervallo

$$\left(\frac{20-\sqrt{172}}{3}, \frac{20+\sqrt{172}}{3}\right)$$

compresi gli estremi. Intanto i coefficienti si annullano e quindi cambiano segno per i valori di $m = 5$, $m = -2$, $m = 4$, e questi valori con le radici del discriminante sono ordinate nel modo indicato dalla figura seguente mediante i punti B, M, C, A, N.

B M +;+ C +;0 A −;∞ −;− N

-2 $\frac{20-\sqrt{172}}{3}$ 4 5 $\frac{20+\sqrt{172}}{3}$

−;+

Occorre quindi esaminare gl'intervalli

$$\left(\frac{20-\sqrt{172}}{3}, 4\right) \quad , \quad (4, 5) \quad , \quad \left(5, \frac{20+\sqrt{172}}{3}\right).$$

Per $m = \frac{20-\sqrt{172}}{3}$, l' equazione ha due radici eguali entrambe a $-\frac{m+2}{2m-10}$, e poiché nell'intervallo $(-2, 4)$ i segni dell'equazione sono $- + -$, presentano cioè due variazioni, le radici sono entrambe positive, e propriamente eguali fra loro nel punto M, e diseguali fra loro nell'intervallo (M, C).

Nel punto C una di queste radici si annulla, l'altra è $= -\frac{m+2}{m-5}$, quindi è positiva.

Nell'intervallo $(4, 5)$, i segni dell' equazione sono $- + +$, e quindi presentano una sola variazione, e perciò una radice è positiva ed un'altra è negativa.

Nel punto A, si annulla il termine a secondo grado, una radice diviene infinita, l'altra è $= -\frac{m-4}{m+2}$, quindi negativa.

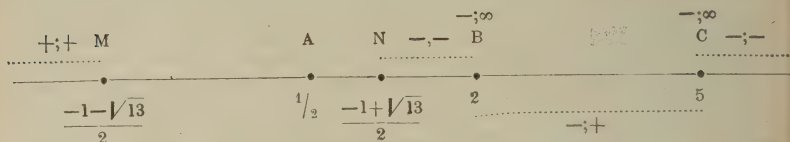
Nell'intervallo (A, N), i segni sono $+ + +$, non presentano alcuna variazione, quindi le radici sono entrambe negative, e sono reali e diseguali fra A ed N, eguali fra loro in N, per divenire complesse a destra di N.

La curva rappresentata da questa equazione (*curva di 3⁰ ordine*) ha un ramo solo che sega l'asse OM nel punto 4, tocca le due verticali condotte nei punti $\frac{20-\sqrt{172}}{3}$, $\frac{20+\sqrt{172}}{3}$ ed ha un asintoto nella verticale condotta pel punto $+5$ di OM.

4.⁰ *Discutere l'equazione* $(m^2-7m+10)x^2+2(2m-1)x+1=0$.

Risolvendola si ha $x = \frac{-(2m-1) \mp \sqrt{3(m^2+m-3)}}{m^2-7m+10}$, il primo coefficiente si annulla per $m=2$, $m=5$, il secondo per $m=\frac{1}{2}$, e il discriminante $3(m^2+m-3)$ si mantiene $\geqq 0$ per valori esterni all'intervallo $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$ com-

presi gli estremi, perciò, tenendo conto della figura, occorre

+;+ M   A   N —,— B (—;∞)   C —;— (—;∞)

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ $1/2$ $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ 2 —;+ 5

esaminare gli intervalli

$$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, 2\right), (2, 5), (5, \infty),$$

di cui gli estremi sono indicati dalle lettere M, A, N, B, C.

Siccome il primo coefficiente è positivo per i valori esterni all'intervallo $(2, 5)$; nel primo degli intervalli da considerare cioè a sinistra di M i segni dell' equazione sono $+ - +$, e quindi le radici dell'equazione sono in esso entrambe positive, e divengono eguali nel punto M, per poi divenire complesse in tutto l'intervallo (M, N). Il punto N si trova nell' intervallo $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ nel quale i segni dell'equazione sono $+ + +$ e quindi le radici fra (N e B) sono entrambe negative, essendo eguali e negative nel punto N.

Nel punto B una di queste radici diviene ∞, l'altra è eguale a $\frac{-1}{2(2m-1)}$, e perciò negativa.

Nell'intervallo $(2, 5)$ i segni dell' equazione sono $- + +$, e quindi una radice è positiva, l'altra negativa.

Nel punto C una radice torna ad essere ∞, l'altra negativa, a destra di C le radici sono entrambe negative.

La curva rappresentata da questa equazione (*curva di* 4^0 *ordine*) ha due asintoti nelle verticali condotte per i punti $+2$ e $+5$ dell'asse OM, ed un asintoto nell'asse OM, ed è formata di 4 rami; dei quali il primo a destra tocca la verticale condotta nel punto $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$, e sta tutto al disopra dell'asse OM; un

secondo sta fra gli asintoti verticali tutto al disopra dell'asse OM; gli altri due sono al disotto dell'asse OM, l'uno tocca la verticale condotta nel punto $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, l'altro sta tutto a destra dell'asintoto del punto $+5$ e tende col terzo ramo ad avvicinarsi all'asse OM.

4. Discussione di equazioni biquadratiche. *Discutere per quali valori di* k *l'equazione* $x^4 - 2kx^2 + (k^2 + 2k - 3) = 0$ *ammette due radici reali o quattro radici reali.*

Risolvendola si ha $x^2 = k \mp \sqrt{3-2k}$, ed i valori di x^2 (come risulta dall'esempio 1^0 del n. **3**) sono l'uno 0, l'altro negativo per $k = -3$, uno solo positivo nell'intervallo $(-3, 1)$; uno zero, l'altro positivo per $k = 1$, entrambi positivi nell'intervallo $(1, {}^3/_2)$, e i eguali a ${}^3/_2$ per $k = {}^3/_2$. Quindi le radici della data equazione sono due reali ed eguali a 0 per $k = -3$, due sole reali e opposte nell'intervallo $(-3, 1)$; due nulle e due reali ed opposte per $k = 1$; tutte e quattro reali nell'intervallo $(1, {}^3/_2)$, ma due opposte alle altre due, per divenire tutte eguali in valore assoluto a $\sqrt{{}^3/_2}$ per $k = {}^3/_2$.

Esternamente all'intervallo $(-3, {}^3/_2)$ le radici sono tutte complesse.

La curva rappresentata da questa equazione (*curva del 4^0 ordine*) è simmetrica rispetto all'asse OK, taglia quest'asse nel punto -3, e nel punto $+1$, e tocca la verticale condotta nel pnnto $\frac{3}{2}$ di OK in due punti simmetrici rispetto ad OK, alla distanza $\sqrt{{}^3/_2}$ da esso.

§ 2. — Confronto delle radici delle equazioni con uno o due numeri dati.

5. Occorre spesso, senza bisogno di risolvere un'equazione di 2^0 grado, di conoscere se un determinato valore α è interno all'intervallo delle radici, supposte reali, o a sinistra della minore o a destra della maggiore.

Indicando al solito con $f(x)$ il trinomio $ax^2 + bx + c$, già si sa che se $f(\alpha)$ è di segno contrario ad a, cioè se $af(\alpha) < 0$,

il trinomio ammette due radici reali e diseguali ed α è interno all'intervallo delle radici (*Alg.*, VI, **21**) *), e quindi si ha

$$x_1 < \alpha < x_2 \ ;$$

e che se $f(\alpha)$ è dello stesso segno di a, cioè se $af(\alpha) > 0$, e se inoltre le radici del trinomio sono reali e distinte, α è esterno all'intervallo delle radici. Ma in questo caso è dubbio se è $\alpha < x_1$, oppure se è $\alpha > x_2$. Per riconoscere quale dei due casi si presenta, si ricorre alla semisomma delle radici $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$. Questo valore è rappresentato dal punto medio dell'intervallo delle radici, quindi se è $\alpha < x_1$ esso è pure $< -\frac{b}{2a}$, e se è $\alpha > x_2$, esso è pure $> -\frac{b}{2a}$. Viceversa, allorquando α è esterno all'intervallo delle radici, se è $\alpha < -\frac{b}{2a}$, è il valore $\alpha < x_1$ e se è $\alpha > -\frac{b}{2a}$, è $\alpha > x_2$. Si esclude naturalmente che sia $f(\alpha) = 0$, perchè ciò significherebbe che α coincide con una delle radici dell'equazione. Dunque:

Per sapere in che ordine si succedono i numeri α, x_1, x_2, *riconosciuti i segni di* a, *di* $f(\alpha)$, *ed il valore di* $-\frac{b}{2a}$,

se è $af(\alpha) < 0$, *si ha* $x_1 < \alpha < x_2$;

se è $af(\alpha) > 0$ *ed è* $\alpha < -\frac{b}{2a}$, *si ha* $\alpha < x_1 < x_2$;

se è $af(\alpha) > 0$ *ed è* $\alpha > -\frac{b}{2a}$, *si ha* $x_1 < x_2 < \alpha$.

6. Esempii. 1.° *Discutere la posizione delle radici dell' equazione* $7x^2 + 5x - 2 = 0$ *per rispetto al numero* 3.

Il valore $7\,f(3)$ è positivo, ed inoltre è $3 > -\frac{5}{14}$, quindi si ha

$$x_1 < x_2 < 3 \ .$$

*) Cfr. anche *Aritm. ed Alg.*, Cap XII, **21**.

2.° *Discutere la posizione delle radici dell' equazione* $2x^2-7x+5=0$ *rispetto al numero* 2.

Il valore $2f(2)$ è negativo, quindi $x_1 < 2 < x_2$.

3.° *Discutere la posizione delle radici dell'equazione* $-2x^2-9x+3=0$ *per rispetto al numero* -5.

Il valore $-2f(-5)$ è positivo, ed è inoltre $-5 < -\frac{9}{4}$, quindi si ha
$$-5 < x_1 < x_2 .$$

7. Occorre altre volte di riconoscere, senza risolvere l'equazione di secondo grado, in che ordine si succedono i numeri α, β x_1, x_2 supposto $\alpha < \beta$ ed $x_1 < x_2$.

Sostituendo i valori di α e β in $f(x)$ possono darsi tre casi:

1.° $f(\alpha), f(\beta)$ entrambe di segno opposto ad a;

2.° $f(\alpha), f(\beta)$ di segno contrario;

3.° $f(\alpha), f(\beta)$ entrambe del segno di a.

Nel primo caso in cui $f(\alpha), f(\beta)$ sono di segno opposto ad a, si ha $af(\alpha) < 0, af(\beta) < 0$. ed entrambi i valori di α e β sono interni all'intervallo delle radici, che in tal caso sono reali, e quindi si riconosce subito che
$$x_1 < \alpha < \beta < x_2 .$$

Nel secondo caso $af(\alpha)$ e $af(\beta)$ sono pure di segno contrario, e quindi uno dei numeri α o β è interno all' intervallo delle radici e l'altro è esterno, e dall' ipotesi $\alpha < \beta$, deducesi che:

Se $af(\alpha) > 0$, *si avrà* $\alpha < x_1 < \beta < x_2$;

se $af(\alpha) < 0$, *si avrà* $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$.

In entrambi questi casi certamente è $\Delta > 0$.

Nel terzo caso in cui $f(\alpha)$ ed $f(\beta)$ hanno lo stesso segno di a, si ha $af(\alpha) > 0, af(\beta) > 0$, ed entrambi i valori α e β sono esterni all'intervallo delle radici, se è $\Delta \geqq 0$, e quindi occorre paragonare α e β con $-\frac{b}{2a}$, e si conchiude che:

Se $-\frac{b}{2a} < \alpha$, *si ha* $x_1 \leqq x_2 < \alpha < \beta$;

se $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$, *si ha* $\alpha < x_1 \leqq x_2 < \beta$;

se $\beta < -\frac{b}{2a}$, *si ha* $\alpha < \beta < x_1 \leqq x_2$.

8. In molti problemi per avere le soluzioni non basta conoscere che l'incognita abbia un valore reale, ma occorre che essa sia limitata fra due valori α e β, cioè che sia

$$\alpha < x < \beta, \quad \text{oppure} \quad \alpha \leq x \leq \beta;$$

cioè che x dovendo appartenere all'intervallo (α, β), possa o non raggiungere gli estremi dell' intervallo. Per riconoscere ciò che succede, occorre in questi casi tener presente la discussione fatta nel numero precedente e quindi nell'ipotesi che debba essere $\alpha < x < \beta$:

Se $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ *il problema non ammette alcuna soluzione;*

se $\alpha < x_1 < \beta < x_2$ *il problema ammette una soluzione, la minore;*

se $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ *il problema ammette una soluzione, la maggiore*;

se $x_1 < x_2 < \alpha < \beta$ *il problema non ammette alcuna soluzione*;

se $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ *il problema ammette due soluzioni; le quali costituiscono una soluzione doppia quando* $x_1 = x_2$, *cioè quando* $\Delta = 0$;

se $\alpha < \beta < x_1 < x_2$ *il problema non ammette alcuna soluzione.*

E si conchiude che *Il problema ammette due soluzioni distinte se*:

$$af(\alpha) > 0 \quad , \quad af(\beta) > 0 \quad , \quad \Delta > 0 \quad , \quad \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta \quad ,$$

e le due soluzioni coincidono in **una** *soluzione doppia qualora sia* $\Delta = 0$;

ammette certamente e soltanto una soluzione, se $af(\alpha)$, $af(\beta)$ *sono di segno contrario, e la soluzione è data da* x_1 *o da* x_2 *secondo che è* $af(\alpha) > 0$ *o* $af(\alpha) < 0$;

non ammette alcuna soluzione in tutti gli altri casi.

9. Qualora però, l'incognita possa raggiungere una o entrambi gli estremi, i valori α e β rappresenteranno il *mi-*

nimo ed il *massimo* valore relativo ai valori che essa può prendere.

E se questi valori α e β possono essere radici dell' equazione $f(x)=0$, essi daranno luogo alle cosidette *soluzioni limiti* del problema.

Supposto che, p. es., α sia radice dell'equazioue, cioè che sia $f(\alpha)=0$, il valore α è soluzione limite, ed è $\alpha=x_2$, se $-\frac{b}{2a}<\alpha$; è $\alpha=x_1$, se $-\frac{b}{2a}>\alpha$; è $\alpha=x_1=x_2$ se $-\frac{b}{2a}=\alpha$.

In quest'ultimo caso si dice che α *è soluzione limite doppia.*

10 Esempii. *Discutere quale delle radici dell'equazione*

$$7x^2-4x-11=0$$

è compresa nell'intervallo $(-2, 7)$ *o nell'intervallo* $(-1, 7)$, *o nell'intervallo* $(0, 7)$.

1.° *Nel caso dell'intervallo* $(-2, 7)$ si consideri che si ha

$$7f(-2)>0 \quad , \quad 7f(7)>0 \quad , \quad \Delta>0 \quad , \quad -2<\frac{2}{7}<7 \; ;$$

dunque entrambe le radici dell'equazione sono comprese nell' intervallo $(-2, 7)$.

2.° *Se invece per la stessa equazione si considera l'intervallo* $(-1, 7)$, essendo $f(-1)=0$, si conchiude che la radice x_2 è contenuta nell'intervallo dato, mentre x_1 coincide con l' estremo sinistro dell'intervallo e quindi costituisce una soluzione limite dell'equazione per quel determinato intervallo.

3.° *Se invece si considera l'intervallo* $(0, 7)$, si dirà :

Essendo $7f(0)<0$, $7f(7)>0$, una sola radice dell'equazione è compresa nell'intervallo dato e precisamente la maggiore x_2.

11. Applicazione I.ª *Data l'equazione di 2° grado*

$$(k-1)x^2-2(k-2)x-(7k+1)=0$$

determinare per quali valori del parametro k *le sue radici saranno comprese fra* -1 *e* $+1$, *inclusi gli estremi.*

Risolvendo l'equazione si ha

$$x=\frac{(k-2)\pm\sqrt{8k^2-10k+3}}{k-1}\,.$$

e siccome le radici del discriminante $8k^2 - 10k + 3$, sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, risulta che le radici della data equazione saranno reali per i valori di k esterni all'intervallo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ inclusi gli estremi.

Occorre quindi esaminare se per i valori di k compresi negli intervalli $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ le radici della data equazione possono essere comprese fra -1 e $+1$.

Poiché $f(-1) = -4k - 6$, $f(+1) = -8k + 2$, ed inoltre la semisomma delle radici è $\frac{k-2}{k-1}$, se si vuole che entrambe le radici siano nell'intervallo $(-1, 1)$ occorre che, all'infuori della condizione di realtá, sia:

$$(k-1)f(-1) = -2(k-1)(2k+3) > 0$$

$$(k-1)f(1) = -2(k-1)(4k-1) > 0$$

$$-1 \leq \frac{k-2}{k-1} \leq 1 .$$

Per la 1ª condizione occorre che k sia interno all' intervallo $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, per la 2ª occorre che k sia interno all' intervallo $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$; per l'ultima, che si scinde in

$$0 \leq \frac{2k-3}{k-1} \quad \text{e} \quad \frac{-1}{k-1} \leq 0 ,$$

occorre che k sia esterno all'intervallo $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ compreso l'estremo $\frac{3}{2}$ per la prima, e sia a destra di $+1$ per la seconda. L'ultima condizione è in contradizione con le precedenti, quindi non è possibile che entrambe le radici dell'equazione data siano comprese fra $(-1, 1)$.

Vediamo ora se può una radice almeno essere compresa nel detto intervallo.

Se si vuole che la minore radice x_1 sia compresa nell' intervallo $(-1, 1)$ occorre, senza tener conto del discriminante, che sia

$$(k-1)f(-1)>0 \quad , \quad (k-1)f(1)<0 \; ,$$

e quindi occorre per la prima condizione che k sia interno all'intervallo $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ e per la seconda che k sia esterno all'intervallo $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, cioè k deve esser compreso nell' intervallo $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$, nel quale caso le radici sono pure reali.

Perchè avvenga invece che la maggiore radice x_2 sia nel chiesto intervallo occorre soltanto che sia

$$(k-1)f(-1)<0 \quad , \quad (k-1)f(1)>0$$

e quindi occorre che k sia esterno all' intervallo $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$, e interno all'intervallo $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, esclusi gli estremi, e ciò non può avvenire.

Dunque si conchiude che della equazione data soltanto la radice x_1 può essere compresa nell'intervallo $(-1, +1)$ e ciò avviene per i valori di k compresi nell' intervallo $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Negli estremi $-\frac{3}{2}$, e $\frac{1}{4}$ la radice x_1 è soluzione limite, poichè per essi si ha rispettivamente $f(-1)=0, f(1)=0$.

12. Applicazione 2.ª *Discutere per quale valore di* m *l'equazione*

$$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0.$$

avrà le sue radici comprese fra 1 *e* 2, *inclusi gli estremi.*

Risolvendola si ha

$$x = \frac{-(2m-3) \mp \sqrt{-(m-3)(m-1)}}{m-2}$$

e le radici sono reali per i valori di m interni all' intervallo $(1, 3)$.

Poiché $f(1) = 2(5m-7)$, $f(2) = 17m - 26$, ed inoltre la semisomma delle radici è $-\frac{2m-3}{m-2}$, se si vuole che entrambe le radici siano comprese nell'intervallo $(1, 2)$ occorre che, all' infuori della condizione di realtà sia pure:

$$(m-2)f(1) = 2(m-2)(5m-7) > 0$$

$$(m-2)f(2) = (m-2)(17m-26) > 0$$

$$1 \leq -\frac{2m-3}{m-2} \leq 2 .$$

Per la 1ª condizione occorre che m sia esterno all' intervallo $\left(\frac{7}{5}, 2\right)$; per la 2ª condizione che sia esterno all'intervallo $\left(\frac{26}{17}, 2\right)$, e resta quindi la 1ª condizione; per la 3ª condizione, che si scinde in

$$\frac{3m-5}{m-2} \leq 0 \quad , \quad \frac{4m-7}{m-2} \geq 0$$

occorre che m sia interno all' intervallo $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ compreso l' estremo sinistro, e che sia esterno all'intervallo $\left(\frac{7}{4}, 2\right)$ compreso l'estremo sinistro. La prima di queste due condizioni non può essere soddisfatta contemporaneamente alla prima condizione trovata sopra, quindi non è possibile che entrambe le radici dell'equazione data siano comprese fra 1 e 2.

Vediamo se almeno la sola radice x_1 possa essere compresa nell'intervallo $(1, 2)$.

Si deve avere per ciò, senza tener conto del discriminante che sia

$$(m-2)(5m-7) > 0 \quad , \quad (m-2)(17m-26) < 0$$

e quindi occorre che m sia esterno all' intervallo $\left(\frac{7}{5}, 2\right)$ e interno all'intervallo $\left(\frac{26}{17}, 2\right)$, e ciò è assurdo essendo $\frac{7}{5} < \frac{26}{17}$.

Resta a vedere se la sola radice x_2 possa essere compresa nell'intervallo $(1, 2)$, perché ciò avvenga si deve ottemperare soltanto alle due condizioni

$$(m-2)(5m-7)<0 \quad , \quad (m-2)(17m-26)>0 \; ,$$

e quindi occorre che m sia interno all' intervallo $\left(\frac{7}{5}, 2\right)$ ed esterno all'intervallo $\left(\frac{26}{17}, 2\right)$. Si conchiude dunque che la data equazione può avere soltanto la radice x_2 compresa nell' intervallo $(1, 2)$, e ciò avviene quando m è interno all' intervallo $\left(\frac{7}{5}, \frac{26}{17}\right)$, nel qual caso le radici sono certrmente reali.

Se per es. si pone $m = \frac{3}{2}$, che è un valore compreso nell'intervallo $\left(\frac{7}{5}, \frac{26}{17}\right)$, l'equazione si riduce a $x^2 = 3$, della quale $x_2 = \sqrt{3}$ è appunto compresa nell'intervallo $(1, 2)$ *).

13. APPLICAZIONE ALLA RISULTANTE DI DUE EQUAZIONI QUADRATICHE. Un'altra applicazione di questa teoria si può fare alla *risultante* di due equazioni quadratiche. Già si sa (*Algebra*, Cap. VI, **9**) **) che, se

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \; , \; \varphi(x) = a'x^2 + b'x + c' = 0$$

sono due equazioni quadratiche, la condizione necessaria e sufficiente affinché esse abbiano una radice comune è espressa da $R. = (ab' - a'b)(bc' - b'c) - (ac' - a'c)^2 = 0$.

Supponendo che siano x_1, x_2 le radici della prima, x'_1, x'_2

*) In altri testi per le discussioni di queste equazioni si usano delle tabelle sinottiche che noi abbiamo evitate, perché ci pare che quel metodo sopprime la elasticità del pensiero dell'alunno e lo ammiserisca in una unica via molto pedestre.

) Cfr. *Aritm. ed Alg.*, Cap. XII, **9.

le radici della seconda, se una radice x_1 o x_2 è radice di $\varphi(x)$ deve essere $\varphi(x_1)=0$ o $\varphi(x_2)=0$ e quindi

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)=0\ .$$

Ma

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)=(a'x_1^2+b'x_1+c')\,(a'x_2^2+b'x_2+c')=$$
$$=a'^2(x_1x_2)^2+a'b'x_1x_2(x_1+x_2)+b'^2x_1x_2+a'c'(x_1^2+x_2^2)+$$
$$+b'c'(x_1+x_2)+c'^2\ ,$$

quindi sostituendo

$$x_1x_2 \text{ con } \frac{c}{a}\ ,\quad x_1+x_2 \text{ con } -\frac{b}{a}\ ,\quad x_1^2+x_2^2 \text{ con } \frac{b^2-2ac}{a^2},$$

si ha

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2)=\frac{1}{a^2}\Big((ac'-a'c)^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)\Big)=-\frac{R}{a^2},$$

e si conchiude che

$$R=-a^2\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ ,$$

e per analogia $\qquad R=-a'^2f(x'_1)\,f(x'_2)\ .$

Allorquando è $R>0$, sarà $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$, e quindi una delle radici x_1, x_2 è interna all'intervallo delle altre due radici x'_1, x'_2, esse sono quindi disposte in uno dei due ordini seguenti

$$x_1<x'_1<x_2<x'_2\quad,\quad x'_1<x_1<x'_2<x_2$$

e ciò secondo che sia $x_1+x_2<$ o $>x'_1+x'_2$, cioè secondo che sia $-\frac{b}{a}<$ o $>-\frac{b'}{a'}$.

In questo caso si dice che le radici *sono separate.*

Quando invece sia $R<0$, si ha $\varphi(x_1)\varphi(x_2)>0$ e se i discriminanti delle equazioni f e φ sono >0, possono essere disposte in uno dei quattro modi

$$x_1<x'_1<x'_2<x_2\quad,\quad x'_1<x_1<x_2<x'_2\ ,$$
$$x_1<x_2<x'_1<x'_2\quad,\quad x'_1<x'_2<x_1<x_2\ .$$

In questo caso si dice che le radici *non sono separate.*

Conchiudendo si ha: *Se la risultante di due equazioni quadratiche è positiva, le radici delle due equazioni si separano; se invece essa è negativa, le radici non si separano.*

§ 3. — Discussioni di problemi di 2° grado.

14. Problemi a una incognita. **Problema I°** (Licenza Istituto 1907).

Sopra una tangente in un punto A *ad una sfera di centro* O *e di raggio* r *si prendono due punti* V *e* V'. *Da questi punti si circoscrivono due coni alla sfera i quali determinano due calotte sferiche interne ad essi. Determinare le distanze* OV *e* OV', *posto che sia* OV — OV' = a, *dove* a *è un segmento dato, e posto che la differenza delle aree delle calotte suddette sia equivalente al doppio dell'area del cerchio di raggio* b. *Il problema è sempre possibile? Esaminare il caso particolare in cui* a = r.

Risoluzione. Tenendo presente la figura si deve avere

$$2\pi r(DE - FG) = 2\pi b^2 ,$$

ovvero

$$r(DE - FG) = b^2 .$$

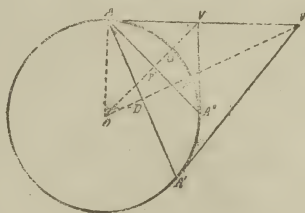
Si ponga

$$OV = x , \quad \text{sarà} \quad OV' = x - a ,$$

$$OD = \frac{r^2}{x}, \quad DE = r - \frac{r^2}{x}, \quad OF = \frac{r^2}{x-a}, \quad FG = r - \frac{r^2}{x-a}$$

$$DE - FG = \frac{r^2}{x-a} - \frac{r^2}{x} = \frac{ar^2}{x(x-a)}$$

e quindi

$$r(DE - FG) = \frac{ar^3}{x(x-a)} .$$

Da cui si deduce

$$\frac{ar^3}{x(x-a)} = b^2 ,$$

e poiché x non può essere eguale né a zero, né ad a, possiamo liberare da' fratti l'equazione ed otteniamo

$$ar^3 = b^2 x(x-a) ,$$

che ordinata diventa

$$b^2x^2 - ab^2x - ar^3 = 0 . \qquad (1)$$

Risolvendo l'ultima equazione si ha

$$x = \text{OV} = \frac{ab \mp \sqrt{a^2b^2 + 4ar^3}}{2b} = \frac{a}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{ar}}{b}\right)^2} .$$

Discussione. Affinché il problema possa risolversi i valori di x devono essere reali e positivi, e deve essere $\text{OV}' \geqq r$, cioè $x \geqq a + r$. Le radici della (1) sono reali e di segno contrario, perché il termine noto è essenzialmente negativo, e la maggiore in valore assoluto è la positiva x_2, quindi la radice negativa x_1 non soddisfa al problema. Si ha intanto

$$\text{OV}' = x - a = -\frac{ab \mp \sqrt{a^2b^2 + 4ar^3}}{2b}$$

e possiamo conchiudere fin da ora che delle due radici dell'equazione (1), l'una rappresenta OV, l'altra col segno cambiato rappresenta OV'.

Perché sia $x_2 \geqq a+r$, dev'essere $a+r$ compreso nell'intervallo delle radici, o coincidente con l'estremo destro, e ciò avverrà se $f(a+r) \leqq 0$. Ma $f(a+r) = b^2r^2 + ab^2r - ar^3$, dunque deve aversi $-ar^2 + b^2r + ab^2 \leqq 0$, ovvero $ar^2 - b^2r - ab^2 \geqq 0$.

Risolvendo questa disequazione rispetto a b, si ha che essa è soddisfatta sempre che sia $b^2 \leqq \frac{ar^2}{a+r}$, cioè che sia b minore o al massimo eguale alla media proporzionale fra r ed il segmento $\frac{ar}{a+r}$. Trattandosi di quantità positive,

basta che sia

$$b \leqq r \sqrt{\frac{a}{a+r}} .$$

Quando b^2 raggiunge il massimo suo valore, sarà $x_2 = a + r$, e $-x_1 = r$; in tal caso il cono di vertice V, si riduce ad un punto, e si ha una *soluzione limite* del problema.

Se per la condizione $OV' \geqq r$ si considera che dev'essere $x_1 \leqq -r$, si ritrova nuovamente la condizione

$$ar^2 - b^2r - ab^2 > 0 .$$

Nel caso particolare in cui sia $a = r$,

$$OV = x = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4r^2}{b^2}}\right) ,$$

$$OV' = x - r = \frac{r}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4r^2}{b^2}} - 1\right) ,$$

e perché sia $OV' \geqq r$, oppure $OV \geqq 2r$, occorre che sia $2b^2 \leqq r^2$, cioè occorre che la differenza delle due calotte sia minore o eguale al cerchio massimo della sfera.

Per la costruzione geometrica, scelto b minore della media proporzionale fra r ed $\frac{ar}{a+r}$, con costruzioni facili, che lasciamo allo studioso, si pervengono a trovare le distanze OV', OV.

15. Problema 2.°

Inscrivere in un cerchio di raggio r *un triangolo isoscele conoscendo che la somma della base e dell' altezza è uguale ad* a.

Risoluzione. Sia ABC il triangolo richiesto; indichiamone con x l'altezza AD; la sua base BC è doppia di DC, quindi è eguale a $2\sqrt{x(2r-x)}$, e per le condizioni del problema

dovrà essere $\quad x + 2\sqrt{x(2r-x)} = a$,
ovvero

$$2\sqrt{x(2r-x)} = a - x . \qquad (1)$$

Elevando a quadrato l'equazione (1), si ha

$$8rx - 4x^2 = a^2 - 2ax + x^2 ,$$

la quale comprende la (1) perciò le radici di questa nuova equazione saranno radici della (1) se rendono positivo $a-x$, cioè se rendono x minore di a.

Ordinando si ha

$$5x^2 - 2(a+4r)x + a^2 = 0$$

e risolvendo risulta

$$x = \frac{a+4r \mp \sqrt{(a+4r)^2 - 5a^2}}{5}$$

Discussione. Le radici devono essere reali, positive e minori di $2r$ e di a. Perché le radici siano reali deve essere

$$(a+4r)^2 \geqq 5a^2 ,$$

ovvero, essendo entrambi i membri della diseguaglianza essenzialmente positivi,

$$a + 4r \geqq a\sqrt{5} ,$$

ovvero

$$a \leqq \frac{4r}{\sqrt{5}-1} ,$$

oppure

$$a \leqq r(\sqrt{5}+1) . \qquad (3)$$

Quando questa condizione è soddisfatta, le radici sono pure positive, perché il termine noto dell'equazione (2) è positivo e il coefficiente del termine a primo grado è negativo.

Per essere le radici $< 2r$ occorre che sia $f(2r) > 0$ e

$$\frac{a+4r}{5} < 2r . \qquad (4)$$

Sostituendo $2r$ nella (2) si ha

$$f(2r) = 20r^2 - 4r(a+4r) + a^2 = 4r^2 - 4ar + a^2 = (2r-a)^2 > 0 .$$

Da $\frac{a+4r}{5} < 2r$ si ricava $a < 6r$, che è verificata quando è soddisfatta la (3).

Resta a vedere se x risulta anche $< a$.

Sostituendo nella (2) ad x il valore a si ha

$$f(a) = 4a(a-2a) .$$

E questo valore è positivo o negativo, secondo che è $a > 2r$ o $< 2r$.

Dobbiamo quindi tener presente i seguenti intervalli della variabile a:

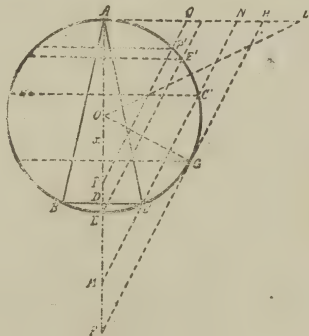
$$0 < a < 2r \quad , \quad 2r \leq a \leq r\left(\sqrt{5}+1\right) .$$

Se a è compreso nel primo intervallo, essendo $f(0) > 0$, $f(a) < 0$ una sola radice risolve il problema e precisamente la minore.

Se a è compreso nel secondo intervallo, inclusi gli estremi, essendo $f(2r) > 0$, $f(a) > 0$ ed inoltre essendo verificata la (4) e $\Delta \geqq 0$, il problema avrà due soluzioni; delle quali una è *soluzione limite* quando $a = 2r$, poiché in tal caso $x = 2r$, ed il triangolo si riduce alla linea AE. Le soluzioni coincidono in una soluzione doppia quando $a = r\left(\sqrt{5}+1\right)$.

Per avere il massimo valore di a si tiri la tangente in A e si prenda $AL = 2r$, sarà $OL = r\sqrt{5}$, e se centro O e raggio OL si taglia il diametro AO in F, sarà

$$AF = r\left(\sqrt{5}+1\right) .$$

Tirando da F la tangente FG alla circonferenza, il triangolo OFG sarà eguale ad OAL, e quindi FG sarà doppio di OG, e per i triangoli simili OFG, AFH sarà pure AF doppio di AH, e quindi la distanza di F dalla corda condotta per G è eguale alla corda stessa, ed il triangolo che ha un vertice della base in G è il triangolo richiesto, quando a raggiunge il massimo valore possibile.

Per ogni altro valore AM di a, se si prende $AN = \frac{1}{2}AM$ e si tira MN ogni punto C o C′ in cui la retta MN sega la circonferenza determina un vertice della base di un triangolo che risolve il problema; perché si ha pure

$$AD + BC = AM = a.$$

E quindi si ritrova con ragionamento geometrico che se è $a > 2r$ e $< r(\sqrt{5} + 1)$ il problema ammette due soluzioni; se $a = 2r$, un punto C coincide con E, ed il problema ha una soluzione propria in E′ ed un'altra impropria o limite nel punto E; se $a = AP < 2r$, il problema ammette una sola soluzione, sempre propria, nel punto P′.

Lasciamo alla cura del lettore di costruire il valore di x mediante la formula ottenuta.

16. Problema 3.°

In un cerchio (O) *di raggio* r *si conduce un diametro* AB *e a partire dal centro si tagliano due segmenti* OA′=OB′ *minori del raggio; sui segmenti* AA′, A′B′, B′B *presi come diametri si descrivono tre circonferenze e si domanda di calcolare la distanza* OA′ = x *in modo che la differenza fra il cerchio dato e la somma dei tre cerchi interni sia equivalente ad un cerchio di raggio* m. *Discutere il problema, e dire quando questa differenza può essere massima o minima.*

Risoluzione. L'equazione cui dà luogo il problema è

$$\pi r^2 - \pi x^2 - 2\pi\left(\frac{r - x}{2}\right)^2 = \pi m^2,$$

che ridotta e ordinata diviene

$$3x^2 - 2rx + 2m^2 - r^2 = 0, \qquad (1)$$

e quindi

$$x = \frac{r}{3} \mp \frac{\sqrt{r^2 - 3(2m^2 - r^2)}}{3} = \frac{r}{3} \mp \sqrt{\frac{4}{9}r^2 - \frac{2}{3}m^2}.$$

Discussione. Le radici devono essere innanzi tutto rea-

li. Perché i valori di x siano reali deve essere

$$m^2 \leq \frac{2}{3} r^2 ,$$

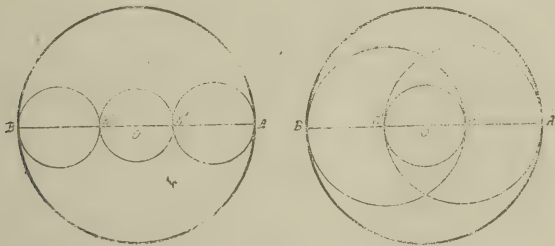
ed essendo m ed r essenzialmente positivi basta che sia

$$m \leq r \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

Ma perché i valori di x risolvano il problema occorre ancora che sia x compreso nell'intervallo $(-r, r)$.

Essendo $3f(-r)$ e $3f(r)$ essenzialmente positivi, ed essendo $\frac{r}{3}$, semisomma delle radici, pure compresa nell' intervallo $(-r, r)$, entrambe le radici risolvono il problema.

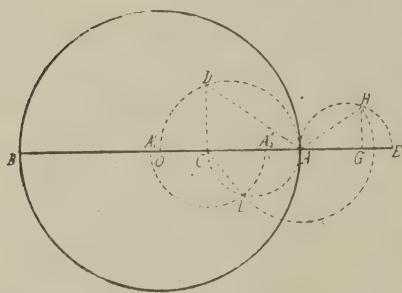
Resta a vedere il segno che esse hanno. Il segno delle radici dipende dal segno del termine noto $2m^2 - r^2$ della (1); quindi :

1.° Se $2m^2 - r^2 < 0$, cioè se $m < \frac{r}{\sqrt{2}}$, le radici sono una positiva e un'altra negativa. Per la positiva si ha la figura posta a sinistra, per la negativa occorre che il punto A'

sia a sinistra di O e quindi i cerchi risultano come si vede nella figura posta a destra.

2.° Se $2m^2 - r^2 = 0$, cioè $m = \frac{r}{\sqrt{2}}$, una radice è zero e in questo caso il cerchio intermedio si riduce a un punto, l'altra è eguale a $\frac{2}{3} r$.

3.° Se $2m^2 - r^2 > 0$, cioè se $m > \frac{r}{\sqrt{2}}$, ed inoltre, come occorre, $\leq r\sqrt{\frac{2}{3}}$ si hanno due soluzioni positive, che si riducono ad una sola quando $m = r\sqrt{\frac{2}{3}}$. In quest' ultimo caso m, che negli altri casi è sempre minore di $\sqrt{\frac{2}{3}}\,r$, assume il massimo valore possibile, e quindi la differenza fra l'area del cerchio dato e la somma delle aree dei cerchi interni è massima ed è eguale a $\frac{2}{3}\pi r^2$.

La differenza suddetta può assumere per minimo valore zero e ciò si ottiene quando si ponga $m = 0$; in tal caso si ha $x = \frac{r}{3} \pm \frac{2}{3}r$, e quindi ciò avviene o per x positivo eguale ad r, oppure per x negativo $= -\frac{r}{3}$.

Costruzione. Il limite superiore di m si può costruire nel seguente modo: si descrive una semicirconferenza sul raggio OA, si prende $AC = \frac{2}{3}r$ e dal punto C si eleva la perpendicolare CD, sarà AD eguale a $r\sqrt{\frac{2}{3}}$ il massimo valore che può assumere m.

Supponiamo quindi dato $m = AE < AD$ e costruiamoci con analogo modo il segmento $AH = m\sqrt{\frac{2}{3}}$, indi sopra AC si descriva una circonferenza, e da A si tiri la corda $AL = AH$, sarà

$$CL = \sqrt{\left(\frac{2}{3}r\right)^2 - \frac{2m^2}{3}}.$$

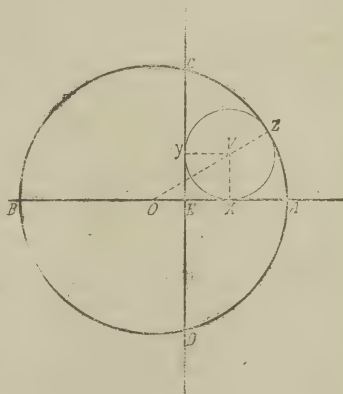
Quindi fatto centro C, con raggio CL si descriva una semicirconferenza, i due punti A'_1, A'_2 che essa determina sul diametro AB sono i punti che risolvono il problema.

17. Problema 4.°

Essendo dato un cerchio O, *un suo diametro* AB *e una retta* CD *perpendicolare ad* AB, *si vuol costruire un cerchio tangente al cerchio dato, al diametro* AB *e alla retta* CD.

Risoluzione. Supponiamo il problema risoluto e sia V il centro del cerchio richiesto che tocchi in X, Y, Z le rette AB, CD, e il cerchio dato O. Indichiamo con x la distanza del punto di contatto X dal centro V, ed indichiamo inoltre con r il raggio del cerchio dato e con a la distanza OE della retta CD dal centro O, la quale si supporrà positiva o negativa secondo che CD si trova a destra o a sinistra del punto O. La figura VXEY è un quadrato e quindi $EX = x$, e considerandola positiva o negativa secondo che X sia a destra o a sinistra di E, risulterà sempre $OX = OE + EX = a + x$, quindi

$$OV = \sqrt{x^2 + (a+x)^2}\ .$$

Essendo i due cerchi tangenti fra loro, i punti O, V, Z sono per diritto, e per tal motivo fra i segmenti esiste la relazione $OZ + ZV + VO = 0$; dippiù OV può essere somma o differenza di r e di x secondo che i cerchi sono tangenti esternamente o internamente e ciò indipendentemente dal segno di EX, perciò occorre dare ad OV pure il doppio segno e si ha

$$r \pm x \pm \sqrt{x^2 + (a+x)^2} = 0$$

ovvero

$$r \pm x = \mp \sqrt{x^2 + (a+x^2)^2}\ .$$

Elevando a quadrato si ha

$$r^2 \mp 2rx + x^2 = 2x^2 + a^2 + 2ax$$

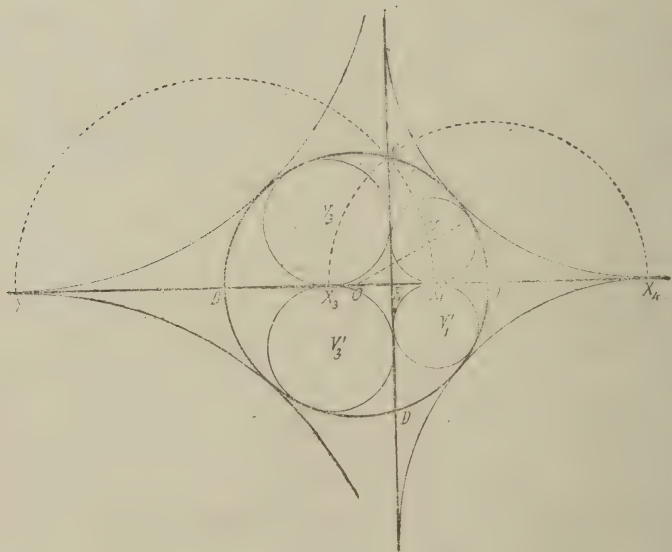
ed ordinando

$$x^2 + 2(a \mp r)\,x - (r^2 - a^2) = 0$$

la quale equazione è equivalente alla precedente.

Risolvendo si ha

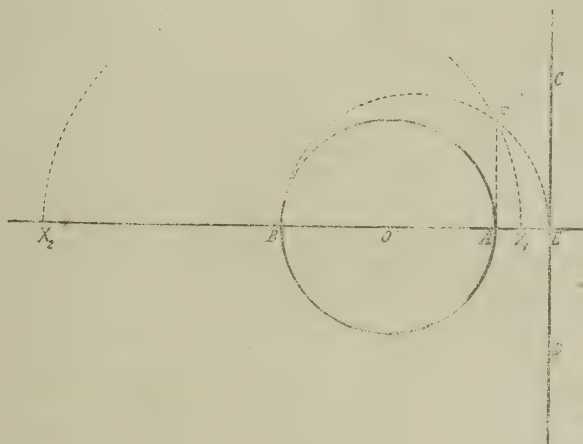
$$x = -(a \mp r) \pm \sqrt{2r(r \mp a)}\,.$$

Discussione e costruzione. Il valore di x dovrebbe essere positivo se rappresentasse soltanto il raggio di un cerchio, ma siccome esso rappresenta pure il segmento EX, mediante

il quale si trova il punto V, può ritenersi positivo o negativo o nullo e senza alcuna limitazione.

Per costruire il punto X si noti che $r + a$ è rappresentato in figura da BE, e il segmento $\sqrt{2r(r + a)}$ è medio proporzionale tra BA e BE e quindi è dato da BC, perciò centro B e raggio BC si determineranno su AB due pnnti

X_1, X_2 che individueranno quattro cerchi, due tangenti internamente e due esternamente che risolvono il problema.

Se invece si tien conto del segno —, il segmento $r - a$ è rappresentato da EA, ed il segmento $\sqrt{2r(r-a)}$ è dato da AC, e quindi centro A e raggio AC si determinano su AB due altri punti X_3, X_4 che danno altri quattro cerchi che risolvono il problema.

Il problema ammette dunque 8 soluzioni reali, quando

sia $a < r$, cioè quando la retta CD è segante del cerchio dato O.

Se $a = 0$, i quattro cerchi interni saranno eguali fra loro e i quattro cerchi esterni saranno pure eguali fra loro.

Se $a = r$, sei cerchi si riducono ad un punto solo, il punto A, e gli altri avranno per raggio $4r$.

Se invece è $a > r$, cioè se la corda CD è esterna al cerchio dato O; quando si tien conto del segno + il segmento $r + a =$ BE, ed il segmento $\sqrt{2r(r+a)}$ è medio proporzionale tra BE e BA e quindi è dato (vedi fig. precedente) da BF, e perciò fatto centro B e raggio BF si determineranno sulla retta AB due punti X_1, X_2 che danno 4 soluzioni reali

del problema. Quando invece si tien conto del segno —, il segmento $r-a$ è dato da AE preso negativamente, e la media proporzionale $\sqrt{2r(r-a)}$ è immaginaria e quindi le altre quattro soluzioni non esistono.

18. Problemi a due incognite. **Problema 5.°** (Licenza Istituto, 1906).

Le misure x *ed* y *delle distanze di due punti mobili su di una retta da un punto* O *di questa sono legate dalla relazione* $xy - a(x+y) + b^2 = 0$, *dove* a *e* b *sono misure di segmenti dati. Trovare: 1.° se ed in quali punti della retta i due mobili s'incontrano; 2.° se e in quali punti della retta i due mobili sono separati da una distanza* k. *Discutere e costruire i risultati.*

1.° **Risoluzione.** Perché i punti X, Y mobili sulla retta s'incontrino deve essere $x=y$; nel qual caso l'equazione data diventa $x^2 - 2ax + b^2 = 0$, da cui si deduce $x = a \mp \sqrt{a^2-b^2}$.

Discussione. I valori di x debbono essere reali. Le radici saranno reali qualora sia $a^2 \geqq b^2$, ovvero (essendo a e b essenzialmente positivi) qualora sia $a \geqq b$.

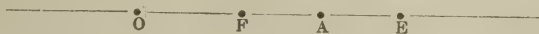
Nel caso che sia $a=b$, i punti s'incontrano una sola volta in un punto A che dista da O di un segmento eguale ad a, e questa posizione deve considerarsi come una soluzione doppia.

Volendo anche vedere in che modo si avvera il movimento sincrono dei punti mobili, osserviamo che dalla relazione data si ricava $x = \frac{ay - b^2}{y-a}$, che per $a=b$ diventa $x = \frac{a(y-a)}{y-a}$, ed è uguale ad a per qualunque valore di y, eccetto che per $y=a$, pel quale perde significato.

Ed allora si deduce che, in questo caso, mentre il punto Y si muove su tutta la retta, il punto X se ne sta fisso in A aspettando che l'altro vada a coincidere con esso. Però quando Y è giunto in A, l'espressione di x diventa $\frac{0}{0}$, che in questo caso si può interpretare come un valore qualunque arbitrario (perché dalla relazione data si avrebbe analogamente $y = \frac{a(x-a)}{x-a}$) e quindi bisogna interpetrare che

quando Y è giunto e resta fisso in A, X a sua volta si mette in movimento su tutta la retta.

Nel caso di $a > b$, i due punti mobili si incontrano in

O F A E

due punti E, F che distano da A di un segmento $= \sqrt{a^2-b^2}$.

Per cercar di sapere in che modo avviene il moto sincrono dei mobili poniamo che il punto Y vada da E in A; la sua distanza da O sarà rappresentata da $a+c$, se $c < \sqrt{a^2-b^2}$.

Quindi si ha:

$$x = \frac{a(a+c)-b^2}{a+c-a} = \frac{ac+a^2-b^2}{c} = a + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}\sqrt{a^2-b^2}\ .$$

Il fattore $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}$ è maggiore di 1, perciò il secondo termine resta sempre maggiore di $\sqrt{a^2-b^2}$; quindi x è maggiore di OE, va crescendo col decrescere di c ed ha per limite l'infinito positivo per $c=0$.

Dunque mentre Y va da E in A, X va da E in senso contrario verso l'infinito: e precisamente raggiunge l'infinito quando Y sta in A.

Poniamo ora che Y vada da A in F, allora la sua distanza è espressa da $a-c$; quindi:

$$x = \frac{a(a-c)-b^2}{a-c-a} = \frac{-ac+a^2-b^2}{-c} = a - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}\sqrt{a^2-b^2}.$$

Un ragionamento analogo al precedente fa conchiudere che il punto X si troverà sempre a sinistra del punto F e precisamente, dall'infinito negativo della retta raggiunge il punto F, quando Y va da A in F.

La simmetria delle formole ci fa conchiudere che se Y si muove da E verso l'infinito a diritta, e da F verso l'infinito a sinistra, il punto X piglierà il posto di Y nello interno del segmento EF. In particolare quando E, F coinci-

dono il movimento si riduce a quello esaminato nel primo caso.

Costruzione. Per costruire i risultati, sopra una retta a partire da O si prendano due punti A e B tali che sia $OA = a$, $OB = b$ e su OA come diametro si costruisca una semicirconferenza, indi fatto centro in O e con raggio OB si seghi questa semicirconferenza in C, sarà $AC = \sqrt{a^2 - b^2}$, e perciò fatto centro in A e raggio AC, si avranno sulla retta i punti E, F che rispondono alla prima questione.

2.° **Risoluzione.** Troviamoci le posizioni dei due mobili quando essi si trovano alla distanza k fra loro. Essendo $x - y = k$, si ha $x = k + y$; quindi l'equazione dataci dal problema diventa,

$$(k + y)\, y - a\,(k + 2y) + b^2 = 0\,,$$

ovvero

$$y^2 - (2a - k)\, y - ak + b^2 = 0\,.$$

Risolvendo si ha:

$$y = \frac{2a - k \mp \sqrt{4a^2 - 4b^2 + k^2}}{2}$$

ovvero

$$y = a - \frac{k}{2} \mp \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}\,,$$

e quindi

$$x = a + \frac{k}{2} \mp \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}\,,$$

Discussione. Perchè il problema sia possibile basterà soltanto che i valori di x e di y siano reali. Dal discriminante risulta che può aversi

$$a^2 - b^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 < 0\,,\quad a^2 - b^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = 0\,,\quad a^2 - b^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 > 0\,.$$

Nel primo caso le radici sono complesse ed il problema è impossibile, ciò avviene quando si ha

$$b^2 > a^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2,$$

cioè quando il segmento b è maggiore dell' ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti a e $k/2$.

Nel secondo caso si ha

$$b^2 = a^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

ed il problema ammette una soluzione doppia data da

$$y = a - \frac{k}{2} \quad , \quad x = a + \frac{k}{2} .$$

Cioè, essendo $OA = a$, i due mobili X, Y si troveranno in due punti K, K′ equidistanti da A di un segmento eguale a $k/2$.

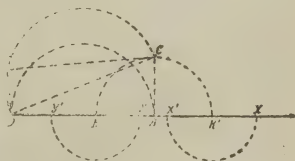
O K A K′

Nel terzo caso è $b^2 < a^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2$, ed essendo le radici reali e distinte, si hanno due posizioni per X e due per Y per le quali i mobili distano fra loro del segmento k.

Costruzione. Per costruire le formole

$$x = a + \frac{k}{2} \mp \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2} \quad , \quad y = a - \frac{k}{2} \mp \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2},$$

segnati col segmento $k/2$ i due punti K e K′, che ci danno la soluzione doppia quando il discriminante è zero, nel punto A si elevi il segmento AC perpendicolare ad OA, e si congiunga O con C sarà

$OC = \sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}$. Su OC si descriva una semicirconferenza e centro C e raggio b si segni su di essa un punto D, sarà OD il valore del radicale, poichè

$$OD = \sqrt{\overline{OC}^2 - b^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - b^2}.$$

Poi centro K e con raggio OD si segnino i due punti Y′ e Y, centro K′ e collo stesso raggio si segnino i punti X′ e X.

Una soluzione è data da X′ ed Y′ ed un'altra è data da X ed Y.

Si riconosce anche dalla costruzione che il caso impossibile è dato da $b > OC$; che quando $b = OC$ si ha una soluzione doppia; e che quando è $b < OC$ si hanno due soluzioni.

Riepilogando dunque;

$$b < \sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}\ , \quad 2 \text{ soluzioni ;}$$

$$b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}\ , \quad 1 \text{ soluzione doppia ;}$$

$$b > \sqrt{a^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2}\ , \quad 0 \text{ soluzioni.}$$

Osservazione. Se k diventa ugnale a zero, la seconda questione si riduce alla prima e la costruzione e la discussione coincidono con quelle fatte nell'altro caso.

19. Problema 6.° *In un semicerchio di raggio* r *inscrivere un rettangolo di perimetro* 2p.

Risoluzione. Indicando con $2x$ la base e con y l'altezza del rettangolo, dalle condizioni del problema si ha

$$2x + y = p \quad , \quad x^2 + y^2 = r^2$$

da cui

$$\begin{cases} y = p - 2x \\ 5x^2 - 4px + (p^2 - r^2) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

e consecutivamente

$$x = \frac{2p \mp \sqrt{5r^2 - p^2}}{5} \quad , \quad y = \frac{p \pm 2\sqrt{5r^2 - p^2}}{5} \ ;$$

quindi le soluzioni del problema sono date da

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{2p - \sqrt{5r^2 - p^2}}{5} \\[2ex] y_1 = \dfrac{p + 2\sqrt{5r^2 - p^2}}{5} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{2p + \sqrt{5r^2 - p^2}}{5} \\[2ex] y_2 = \dfrac{p - 2\sqrt{5r^2 - p^2}}{5} \end{cases}$$

Discussione. Per la natura del problema i valori di x ed y devono essere reali, positivi o nulli, e minori di r.

Perché essi siano reali deve essere $5r^2 \geqq p^2$, e poiché p ed r sono essenzialmente positivi basta che sia $p \leqq r\sqrt{5}$, cioè $p \leqq$ alla diagonale del rettangolo circoscritto al semicerchio.

Soddisfatta la condizione di realtà, per essere tanto la x che la y positivi o nulli, occorre che sia $x \geqq 0$, $p - 2x \geqq 0$, cioè che sia $0 \leqq x \leqq {}^1/_2\, p$.

Quando queste condizioni sono soddisfatte, x ed y saranno pure minori di r, perché il valore r è esterno all'intervallo delle radici, tanto di x che di y, ed a destra di esse. Infatti, per la x, sostituendo r in (1) si ha $f(r) = (2r - p)^2$, che è essenzialmente positivo; e la semisomma delle radici è $\dfrac{2p}{5}$, che è $< r$, poiché, per $p \leqq r\sqrt{5}$, si ha

$$\frac{2p}{5} \leqq \frac{2}{\sqrt{5}}\, r < r\,.$$

Analogamente si verificherebbe per la y, ma ciò non occorre, poiché quando è $x < r$, dall'equazione $x^2 + y^2 = r^2$ risulta che è anche $y < r$.

Osserviamo che: dalla (1) risulta essere $f(0) = p^2 - r^2$, $f(p/2) = \dfrac{p^2}{4} - r^2$; che il primo coefficiente della (1) è numero positivo; e che per la semisomma delle radici sono soddisfatte le condizioni

$$0 < {}^2/_5\, p < {}^1/_2\, p\,.$$

Perciò il problema ammetterà due soluzioni quando sia

$$p^2 - r^2 \geqq 0 \quad , \quad \frac{p^2}{4} - r^2 \geqq 0 \quad , \quad p \leqq r\sqrt{5} \ ;$$

cioè (essendo p ed r essenzialmente positivi) quando sia

$$p \geqq r \quad , \quad p \geqq 2r \quad , \quad p \leqq r\sqrt{5} \ ;$$

ovvero quando sia

$$2r \leqq p \leqq r\sqrt{5} \ .$$

E più precisamente:

quando $p = r\sqrt{5}$, il problema ammette una soluzione ordinaria doppia; che rappresenta anche il rettangolo di massimo perimetro;

quando $2r < p < r\sqrt{5}$, il problema ammette due soluzioni ordinarie;

quando $p = 2r$, il problema ammette una soluzione ordinaria x_1, y_1, ed una soluzione limite $x_2 = r$, $y_2 = 0$, per la quale *il rettangolo si riduce al diametro del semicerchio.*

Il problema ammette una soluzione quando $f(0)$ e $f(p/2)$ sono di segno contrario; e siccome $f(0)$ negativa ed $f(p/2)$ positiva sarebbero contraddittorie, occorre che sia:

$$r \leqq p < 2r \ .$$

E quindi risulta che:

quando $r < p < 2r$ il problema ammette una soluzione data da x_1, y_1 (per l'altra soluzione x_2 è positiva, y_2 è negativa);

quando $r = p$, il problema ha una soluzione limite data da $x_1 = 0$, $y_1 = r$, per la quale *il rettangolo si riduce al raggio perpendicolare al diametro del semicerchio* (l'altra soluzione presenta x_2 positiva, y_2 negativa).

Il problema non ammette alcuna soluzione quando $f(0)$ ed $f(p/2)$ sono entrambe negative, cioé quando è $p < r$.

Si lascia la costruzione geometrica allo studioso.

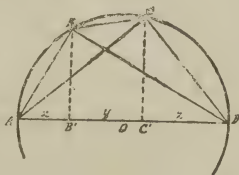
Si noti che le soluzioni in cui una delle due incognite è negativa rispondono al problema seguente:

In un semicerchio di raggio r *inscrivere un rettangolo di cui la differenza dei lati sia eguale a* p *).

20. Problemi a tre incognite. **Problema 7°** (Licenza Istituto, 1907).

In un circolo di raggio r *è inscritto un quadrilatero convesso* ABCD *in modo che il primo vertice* A *e l'ultimo* D *sono estremi di un diametro Calcolare i lati* AB, BC, CD *conoscendo che le proiezioni loro sul diametro* AD *siano in progressione aritmetica nell'ordine in cui si succedono, e che it rettangolo delle diagonali* AC *e* BD *abbia un rapporto dato* q *al quadrato di lato* r.

Risoluzione. Si indichino con x, y, z le proiezioni BB', B'C', C'D dei lati AB, BC, CD sul diametro AD.

Per essere queste in progressione aritmetica si ha $x+z=2y$, ma la loro somma $=2r$, dunque $3y=2r$, cioè $y=\frac{2}{3}$ e quindi $z=\frac{4}{3}r-x$.

D'altra parte le diagonali AC, BD sono date dalle formole

$$AC=\sqrt{2r\left(\frac{2}{3}r+x\right)}\ ,\quad BD=\sqrt{2r(2r-x)}\ ,$$

e siccome per i dati del problema deve essere $\frac{AC \cdot BD}{r^2}=q$, sostituendo e liberando dai fratti si ha l'equazione

$$2\sqrt{(2r-x)\left(\frac{2}{3}r+x\right)}=qr\ . \qquad (1)$$

---

*) Coi metodi delle tavole sinottiche, che si usano da altri autori (veggasi p. es. Zuccagni, *Trattato di Alg. compl.*, p. 165), non risulta la discussione del problema così convincente e rapida, come quando, e noi qui preferiamo di fare, si va direttamente alla ricerca ed all'esame delle condizioni cui le incognite devono soddisfare.

Elevando a quadrato si ha l'altra equazione

$$4\left(\frac{4}{3}r^2+\frac{4}{3}rx-x^2\right)=q^2r^2 \ ,$$

la quale, come è noto, comprende la prima, ma siccome noi dobbiamo dare al radicale il segno $+$, ed il secondo membro è essenzialmente positivo, possiamo essere sicuri che le radici che troveremo sono radici della (1) (Cfr. III, **24**).

Sviluppando, semplificando e ordinando, quest'ultima diviene

$$12x^2-16rx-r^2(16-3q^2)=0 \qquad (2)$$

da cui risulta

$$x=\frac{8r\mp\sqrt{64r^2+12r^2(16-3q^2)}}{12}=\frac{2}{3}r\pm\frac{r}{6}\sqrt{64-9q^2} \ .$$

Discussione. Per le condizioni del problema le radici debbono essere reali e positive e minori di $\frac{4}{3}r$ (pel valore di z),

Per essere reali occorre che sia $q^2\leq\frac{64}{9}$, ovvero $q\leq\frac{8}{3}$. Per essere positive, essendo negativo il secondo coefficiente della (2), deve essere positivo il termine noto, cioè $q^2>\frac{16}{3}$, ovvero $q>\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Perché le radici siano minori di $\frac{4}{3}$, essendo $\frac{4}{3}r>$ della semisomma delle radici, $\frac{2}{3}r$, deve essere $f\left(\frac{4}{3}r\right)>0$, e ciò si avvera, essendo $f\left(\frac{4}{3}r\right)=r^2(3q^2-16)$.

Dunque il problema ammette due soluzioni sempre che sia

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}<q\leq\frac{8}{3} \ .$$

Potrebbe anche essere $q = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, ma in tal caso una delle radici è zero, e ciò vuol dire che il quadrilatero si riduce a un triangolo, perché il punto B coincide con A *).

Per avere dal valore di x i lati del quadrilatero, osserviamo che

$$AB = \sqrt{2rx} = r\sqrt{\frac{4 \mp \sqrt{64 - 9q^2}}{3}},$$

$$CD = \sqrt{2rz} = \sqrt{2r\left(\frac{4}{3}r - r\frac{4 \mp \sqrt{64-9q^2}}{6}\right)} = r\sqrt{\frac{4 \mp \sqrt{64 - 9q^2}}{3}}$$

e che dal teorema detto di T o l o m e o,

$$AC \cdot BD = BC \cdot 2r + AB \cdot CD,$$

si deduce

$$BC = \frac{AC \cdot BD - AB \cdot CD}{2r} = \frac{qr^2 - r^2\sqrt{\frac{16-(64-9q^2)}{9}}}{2r} = r\frac{q - \sqrt{q^2 - \frac{16}{3}}}{2}.$$

Dunque il problema ammette le seguenti soluzioni:

$$1^a \begin{cases} AB = r\sqrt{\frac{4 - \sqrt{64-9q^2}}{3}}, \\ BC = r\frac{q - \sqrt{q^2 - \frac{16}{3}}}{2}, \\ CD = r\sqrt{\frac{4 + \sqrt{64-9q^2}}{3}}, \end{cases} \qquad 2^a \begin{cases} AB = r\sqrt{\frac{4 + \sqrt{64-9q^2}}{3}}, \\ BC = r\frac{q - \sqrt{q^2 - \frac{16}{3}}}{2}, \\ CD = r\sqrt{\frac{4 - \sqrt{64-9p^2}}{3}}, \end{cases}$$

e queste soluzioni danno due quadrilateri che differiscono

---

*) Si potrebbe anche discutere in base al teorema del n. **5** dicendo: affinché il problema abbia due soluzioni occorre che sia

$$12\,f\,(0) > 0 \quad , \quad 12\,f\left(\frac{4}{3}\,r\right) > 0 \quad , \quad 0 < \frac{2}{3}\,r < 2r \quad , \quad \Delta > 0\,.$$

Ora $12\,f\,(0) = -12r^2(16 - 3q^2)$ e $12\,f\left(\frac{4}{3}\,r\right) = 12r^2(3q^2 - 16)$, e per essere entrambi > 0 occorre che sia $3q^2 > 16$ e siccome le due altre condizioni sono soddisfatte, si conchiude egualmente come sopra.

soltanto nel senso con cui il contorno del quadrilatero è percorso

Allorquando $q = \frac{8}{3}$, risulta $AB' = C'D = x$, il quadrilatero riducesi ad un trapezio isoscele i cui lati si proiettano sulla base in segmenti eguali (progressione aritmetica di ragione 0) e le due soluzioni coincidono in una, data da:

$$AB = r\sqrt{\frac{4}{3}} \quad , \quad BC = \frac{2r}{3} \quad , \quad CD = r\sqrt{\frac{4}{3}} \; .$$

21. Problema 8.°

Calcolare i lati di un triangolo rettangolo conoscendone il perimetro 2p *e la sua superficie* m².

Risoluzione. Indichiamo con x ed y i cateti del triangolo rettangolo con z l'ipotenusa; per l'enunciato del problema si ha il seguente sistema di equazioni

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2p \; , \\ xy &= 2m \; , \\ x^2 + y^2 &= z^2 \; , \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Aggiungendo alla terza equazione il doppio della seconda,

si ha $$(x + y)^2 = z^2 + 4m^2 \; ,$$

mentre la prima dà

$$x + y = 2p - z \; ;$$

cosicché sostituendo nella precedente si ha successivamente

$$(2p - z)^2 = z^2 + 4m^2 \; ,$$
$$4p^2 - 4pz = 4m^2 \; ,$$
$$p^2 - pz = m^2 \; ,$$
$$z = \frac{p^2 - m^2}{p} \; ,$$

e quindi dei cateti x, y si conosce che

$$x + y = \frac{p^2 + m^2}{p} \quad , \quad xy = 2m^2 \; ;$$

e perciò essi sono le radici dell'equazione quadratica

$$t^2 - \frac{p^2 + m^2}{p} t + 2m^2 = 0 ,$$

da cui si ha

$$t = \frac{1}{2p}\left[p^2 + m^2 \mp \sqrt{(p^2 + m^2)^2 - 8p^2m^2}\right] .$$

Discussione. I valori di x, y, z devono essere essenzialmente reali e positivi, quindi deve essere dapprima, pel valore di z,

$$p > m$$

ed inoltre per la realtà dei valori di x ed y, deve essere

$$(p^2 + m^2)^2 \geqq 8p^2m^2 ,$$

e poiché i due membri della diseguaglianza sono quadrati di numeri positivi basterà che sia

$$p^2 + m^2 \geqq 2\sqrt{2}\, mp ,$$

ovvero che sia

$$p^2 - 2\sqrt{2}\, mp + m^2 \geqq 0 . \qquad (2)$$

Le radici del primo membro di questa condizione mista sono

$$p = m(\sqrt{2} \mp 1) ,$$

quindi la condizione di realtà è soddisfatta da

$$p \leqq m(\sqrt{2} - 1) \quad \text{e da} \quad p \geqq m(\sqrt{2} + 1) ,$$

ma deve pur essere $p > m$, resta dunque per la possibilità pel problema la sola condizione

$$p \geqq m(\sqrt{2} + 1) .$$

Soddisfatta questa condizione i valori di x ed y sono entrambi positivi.

E in tal caso si hanno due soluzioni, coincidenti in una unica soluzione data da

$$x = \frac{1}{2p}\left[p^2 + m^2 - \sqrt{(p^2+m^2)^2 - 8p^2m^2}\right] ,$$

$$y = \frac{1}{2p}\left[p^2 + m^2 + \sqrt{(p^2+m^2)^2 - 8p^2m^2}\right] ,$$

$$z = \frac{p^2 - m^2}{p} .$$

Osservazione. Quando $p = m(\sqrt{2}+1)$ il discriminante è zero e il triangolo risulta isóscele. In questo caso

$$x = y = \frac{m^2(\sqrt{2}+1)^2 + m^2}{2m(\sqrt{2}+1)} = m\sqrt{2}$$

ed il triangolo ha il minimo perimetro possibile.

Si poteva risolvere la condizione mista (2) per rispetto ad m e si sarebbe trovato

$$m \leq p(\sqrt{2}-1)$$

e quindi di tutti i triangoli soddisfacenti al problema il triangolo isoscele è non solo di minimo perimetro, ma anche di massima area.

22. Problema 9.° *Determinare le lunghezze degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo, conoscendo che la superficie è* $2s^2$, *la somma delle lunghezze degli spigoli è* $4l$ *e che il rapporto di due di queste lunghezze è* k.

Risoluzione. Indicando con x, y, z le lunghezze degli spigoli concorrenti in un vertice, e con k il rapporto fra y e x, si ha

$$xy + yz + zx = s^2 ,$$
$$x + y + z = l ,$$
$$y = kx.$$

Sostituendo il valore della y dato dalla terza equazione,

nelle prime due equazioni ed eliminando z fra esse, si ha

$$z = l - (k+1)x$$
$$(k^2 + k + 1)x^2 - (k+1)lx + s^2 = 0 \,. \qquad (1)$$

Risolvendo la (1) si ha

$$x = \frac{(k+1)l \mp \sqrt{(k+1)^2 l^2 - 4s^2(k^2+k+1)}}{2(k^2+k+1)}$$

da cui facilmente si hanno i valori di z e di y.

Discussione. Affinché il problema sia possibile i valori di x, y, z devono essere reali e positivi (non nulli). Perché essi siano reali deve essere

$$(k+1)^2 l^2 \geqq 4s^2(k^2+k+1) \,,$$

ovvero

$$(k+1)l \geqq 2s\sqrt{k^2+k+1} \,,$$

o. anche

$$\frac{s}{l} \leqq \frac{k+1}{2\sqrt{k^2+k+1}} \,.$$

Se questa condizione è soddisfatta, tanto x che y saranno positivi, perché l'equazione (1) ha il termine noto positivo e il coefficiente del secondo termine negativo.

Per essere positivi anche i valori z, occorre che sia $l > (k+1)x$, ovvero che sia soltanto

$$x < \frac{l}{k+1} \,.$$

Sostituendo nella (1) si ha

$$f\left(\frac{l}{k+1}\right) = (k^2+k+1)\frac{l^2}{(k+1)^2} - l^2 + s^2 = s^2 - \frac{kl^2}{(k+1)^2} \,.$$

e questo valore può essere $>$, $=$, o < 0, secondo che sia $\frac{s}{l} \gtreqless \frac{\sqrt{k}}{k+1}$. Inoltre il valore $\frac{l}{k+1}$ è maggiore della semisomma delle radici della (1), $\frac{(k+1)l}{2(k^2+k+1)}$, perché

$(k+1)^2 < 2(k^2+k+1)$, che riducesi a $0 < k^2+1$; dippiù è da osservarsi che $\frac{\sqrt{k}}{k+1} < \frac{k+1}{2\sqrt{k^2+k+1}}$ perchè $2\sqrt{k^3+k^2+k} < (k+1)^2$ (difatti questa diseguaglianza elevata a quadrato riducesi a $0 < k^4+2k^2+1$).

$$\frac{\sqrt{k}}{k+1} \qquad \frac{(k+1)l}{2(k^2+k+1)} \qquad \frac{l}{k+1}$$

Dunque:

se $\frac{s}{l} \leq \frac{\sqrt{k}}{k+1}$, cioè $f\left(\frac{l}{k+1}\right) \leq 0$, $\frac{l}{k+1}$ è compreso fra le radici x_1, x_2 o coincide con la maggiore, ed il problema ammette una sola soluzione data da x_1, y_1, z_1;

se $\frac{\sqrt{k}}{k+1} < \frac{s}{l} < \frac{k+1}{2\sqrt{k^2+k+1}}$, $\frac{l}{k+1}$ è esterno all'intervallo delle radici a destra della maggiore, ed il problema ammette due soluzioni;

se $\frac{s}{l} = \frac{k+1}{2\sqrt{k^2+k+1}}$, il problema ammette una soluzione doppia data da

$$x_{1,2} = \frac{(k+1)\,l}{2(k^2+k+1)}, \quad y_{1,2} = \frac{k(k+1)l}{2(k^2+k+1)}, \quad z_{1,2} = \frac{(k^2+1)l}{2(k^2+k+1)}.$$

23. Problema 10.° *Determinare i lati di un triangolo del quale sia dato il perimetro* 2p *il prodotto* k^2 *di due lati, e la bisettrice* β *dell'angolo compreso fra questi lati.*

Risoluzione. Indicando con x, y, z i lati del triangolo, e supposto che la bisettrice β sia relativa all'angolo compreso fra i lati y e x, sapendo che il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente al quadrato della bisettrice aumentato del rettangolo dei segmenti che essa determina sul terzo lato, si ha per le condizioni del problema

il seguente sistema di equazioni:

$$x+y+z=2p \quad , \quad xy=k^2 ,$$

$$xy=\beta^2+\frac{z^2xy}{(x+y)^2} .$$

Sostituendo nella terza equazione i valori di xy e di $x+y$ dati dalle altre due si ha

$$k^2=\beta^2+\frac{k^2z^2}{(2p-z)^2} ,$$

da cui, liberando da' fratti ed osservando che la radice $z=2p$, che può introdursi, è da scartarsi, risulta

$$\beta^2z^2+4p(k^2-\beta^2)z-4p^2(k^2-\beta^2)=0 , \qquad (1)$$

e quindi

$$z=\frac{-2p(k^2-\beta^2)\pm 2pk\sqrt{k^2-\beta^2}}{\beta^2} .$$

Per la realtà del valore di z, basta che sia $\beta^2 \leq k^2$, ovvero $\beta \leq k$; ma se $\beta=k$, $z=0$, quindi la condizione si limita a $\beta<k$. Quando questa condizione sia soddisfatta, una delle radici dell'equazione (1) è negativa, perché il termine noto di essa è negativo, e questa radice si scarta, e resta possibile soltanto la radice positiva.

Trovato il valore di z, il sistema si riduce a

$$xy=k^2 \quad , \quad x+y=\frac{2pk}{\beta^2}\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)$$

e quindi x, y sono le radici dell'equazione

$$t^2-\frac{2pk}{\beta^2}\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)t+k^2=0 .$$

Risolvendola si ha

$$t=\frac{pk}{\beta^2}\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)\mp\frac{k}{\beta^2}\sqrt{p^2\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)^2-\beta^4} .$$

Quindi per i lati x, y del triangolo si trova

$$x = \frac{pk}{\beta^2}\left(k - \sqrt{k^2 - \beta^2}\right) \pm \frac{k}{\beta^2}\sqrt{p^2\left(k - \sqrt{k^2 - \beta^2}\right)^2 - \beta^4},$$

$$y = \frac{pk}{\beta^2}\left(k - \sqrt{k^2 - \beta^2}\right) \mp \frac{k}{\beta^2}\sqrt{p^2\left(k - \sqrt{k^2 - \beta^2}\right)^2 - \beta^4}.$$

Discussione. Perché il problema sia possibile occorre che i valori di x, y, z siano reali e positivi, e che inoltre sia $x + y > z$, $|x - y| < z$.

Per la realtà dei valori di x ed y occorre che sia

$$p^2\left(k - \sqrt{k^2 - \beta^2}\right)^2 \geqq \beta^4$$

e poiché $k - \sqrt{k^2 - \beta^2}$ è positivo basta che sia

$$p\left(k - \sqrt{k^2 - \beta^2}\right) \geqq \beta^2, \quad \text{ovvero} \quad pk - \beta^2 \geqq p\sqrt{k^2 - \beta^2}.$$

Il secondo membro di questa condizione mista è positiva, quindi occorre che sia (teor. **6°** del Cap. III)

$$pk - \beta^2 > 0 \quad , \quad k > \beta \quad , \quad (pk - \beta^2)^2 \geqq p^2(k^2 - \beta^2).$$

La terza delle precedenti condizioni si riduce a

$$\beta^2 \geqq p(2k - p),$$

quindi riassumendole si deve avere

$$p(2k - p) \leqq \beta^2 < pk,$$
$$\beta < k.$$

Ma perché non ci sia contradizione occorre che sia

$$p(2k - p) < pk \quad , \quad p(2k - p) < k^2,$$

ovvero

$$k < p \quad , \quad 0 < (p - k)^2.$$

Di queste condizioni la seconda è sempre vera, dunque i valori di z, x ed y sono reali quando sia

$$\beta < k < p,$$
$$p(2k - p) \leqq \beta^2.$$

Restano ora ad esaminare le altre condizioni

$$x+y>z \quad , \quad |x-y|<z \; .$$

Per la prima si deve avere

$$\frac{2kp}{\beta^2}\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)>\frac{-2p(k^2-\beta^2)+2pk\sqrt{k^2-\beta^2}}{\beta^2} \; ,$$

ovvero

$$k\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)>\sqrt{k^2-\beta^2}\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right) ,$$

oppure

$$k>\sqrt{k^2-\beta^2} \quad , \quad \left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)^2>0$$

che è sempre vera; per la seconda occorre che sia

$$\frac{2k}{\beta^2}\sqrt{p^2\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)^2-\beta^4}<\frac{-2p(k^2-\beta^2)+2pk\sqrt{k^2-\beta^2}}{\beta^2} \; ,$$

ovvero succcessivamente:

$$k^2p^2\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)^2-k^2\beta^4<p^2(k^2-\beta^2)\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)^2 ,$$

$$k^2\beta^4>p^2\beta^2\left(k-\sqrt{k^2-\beta^2}\right)^2 ,$$

$$k\beta>pk-p\sqrt{k^4-\beta^2} \; ,$$

$$p\sqrt{k^2-\beta^2}>k(p-\beta) \; ,$$

$$\beta<\frac{2pk^2}{p^2+k^2} \; ;$$

la quale condizione non è inclusa nelle precedenti, perché è $k>\frac{2pk^2}{p^2+k^2}$ (essendo $p^2+k^2>2pk$).

Quindi affinché il problema sia possibile occorre che sia

$$k<p \quad , \quad p(2k-p)\leq\beta^2<\left(\frac{2pk^2}{p^2+k^2}\right)^2 \qquad (2)$$

qualora sia

$$p(2k-p)<\left(\frac{2pk^2}{p^2+k^2}\right)^2 .$$

Quest'ultima condizione è sempre soddisfatta per $k<p$ ed

entrambi positivi; difatti essa riducesi successivamente a

$$(2k-p)(p^2+k^2)^2 < 4pk^4 \ ,$$

$$p^5 - 2kp^4 + 2k^2p^3 - 4k^3p^2 + 5k^4p - 2k^5 > 0 \ ,$$

ed essendo il primo membro divisibile per $p-k$ (per la regola di Ruffini) si riduce ancora a

$$(p^2+pk+2k^2)(p-k)^3 > 0 \ ;$$

dunque il problema ammette due soluzioni, riducibili ad una, sempre che siano soddisfatte le condizioni (2).

Esercizi.

1. Dimostrare che l'equazione $(x-m)(x-n)-c^2=0$, per $m \neq n$, $c \neq 0$, ammette due radici reali diseguali fra le quali sono comprese m ed n.

2. Dimostrare che l'equazione $a^2(x-q)+b^2(x-p)+k(x-p)(x-q)=0$, per $p \neq q$, $k \neq 0$, ammette sempre due radici distinte, una delle quali è compresa fra p e q, e determinare che la condizione perchè vi sia compresa la minore o la maggiore è che sia k negativo o positivo.

— Confrontare col numero k le radici di una delle seguenti equazioni:

3. $3x^2+2kx-5k^2+a^2=0$.

4. $2kx^2-(k+1)x+k-1=0$.

5. $x^2+(k^2-1)x-k(k+1)=0$.

6. Confrontare con r e $-r$ le radici dell'equazione

$$x^2-rx+r(a-2r)=0 \ .$$

7. Confrontare con 0 ed m le radici dell'equazione

$$2x^2-2(a+m)x+m^2=0 \ .$$

8. Confrontare con α e β le radici dell'equazione

$$x^2-\alpha(\beta+1)x-(\alpha^2-\beta^2)=0 \ .$$

— Discutere le seguenti equazioni al variare del parametro in esse contenuto e trovare i valori massimi e minimi delle x.

9. $x^2+3x-(k-3)=0$.

10. $x^2-3(k+1)x+9=0$.

11. $x^2+(p-1)x+p^2-1=0$.

12. $x^2-5x+k^2-5k+6=0$.

13. $x=\dfrac{kx-1}{kx+1}$.

14. $mx^2+(m+1)x-(2m+1)=0$.

15. $x^2 - 3(k^2 - 11k + 28)x - 10 = 0$.

16. $(a - 2)x^2 - 2ax - (a + 1) = 0$.

17. $(k - 1)x^2 + (k - 4)x + (k - 6) = 0$.

18. $(m - 2)x^2 - (m - 4)x + (m - 3) = 0$.

19. $x^2 - (2k - 5)x + 3k + 6 = 0$.

20. $(3a - 1)x^2 - (2a + 1)x + 1 = 0$.

21. $(7k + 2)x^2 - (k + 1)x + (k + 3) = 0$.

22. $(k^2 + k - 2)x^2 + 2(k + 1)x - (k + 1) = 0$.

23. $x^4 - (3a - 5)x^2 + a(a - 2) = 0$.

24. Discutere la seguente equazione considerando la x come parametro e trovarne la rappresentazione geometrica:

$$\frac{1}{5}y^4 + x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2 + \frac{2}{3}y^2 + 1 = 0.$$

25. Data una qualunque delle equazioni **9-22** determinare per quali valori del parametro il primo membro si può scomporre in somma di due quadrati. (Tener presente che affinché ciò avvenga le radici del trinomio debbono essere complesse).

— Data una delle equazioni seguenti determinare per quali valori del parametro essa ha una o entrambe le radici comprese nell'intervallo segnato affianco:

26.	$(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + 3m = 0$,	$(-1, +1)$.
27.	$5x^2 - 4mrx + (m^2 - r^2) = 0$,	$(0, r)$ inclusi gli estremi.
28.	$mx^2 - (2m - 1)rx + 6r^2 = 0$,	$(0, 2r)$ » » »
29.	$kx^2 - (2k + 3)a - (3k - 6) = 0$,	$(1, 10)$.
30.	$(k - 2)x^2 - (5k - 20)x + 2k = 0$,	$(0, 20)$.
31.	$(2m - 1)x^2 - 5mx + m - 3 = 0$,	$(-5, +5)$.
32.	$2(k - 1)x^2 - (k - 8)x + (k - 3) = 0$,	$(-1, +1)$.
33.	$3x^2 - 4(m - 1)rx + 5mr^2 = 0$,	$(0, r)$.
34.	$(k - 2)x^2 - (2k - 1)rx + (k + 2)r^2 = 0$,	$(0, 2r)$.

35. Discutere al variare di a come sono situate le radici delle due equazioni

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad , \quad ax^2 + x - a = 0.$$

36. In un triangolo di base b e altezza h inscrivere un rettangolo di area m^2. Discutere e costruire i risultati. (R. Se x è l'altezza, $bx^2 - hbx + hm^2 = 0$).

37. Di un triangolo sono noti il perimetro $2p$ e la bisettrice b di un angolo e si sa inoltre che i due lati di questo angolo hanno per media aritmetica il terzo lato. Si domandano i valori dei lati del triangolo in funzione della bisettrice e del perimetro e la costruzione del triangolo. (Licenza Istituto, 1898).

(R. $b\sqrt{3} \leq p < 2b$).

38. Conoscendo due lati a e b di un triangolo e la bisettrice l dell'angolo

C da essi compreso, trovare le formole che determinano per mezzo dei dati a, b, l gli angoli A, B, C del triangolo e il lato c. Discutere il problema.

$$\left(\text{R. } l < \frac{2ab}{a+b}\right).$$

39. Si ha un trapezio del quale i due lati paralleli sono a e b, con $a < b$, e l'altezza è h. Si trovi a quale distanza x dal lato b dovrà condursi il segmento y parallelo a questo lato per fare sì che il trapezio resti diviso in due trapezii tali che quello i cui lati paralleli sono b ed y stia all'altro in un rapporto dato q, e si dia anche la lunghezza del segmento y. Si discutano i risultati. (Licenza Istituto, 1894). (R. Il problema ammette sempre una soluzione).

40. Conoscendo le distanze a e b di un punto M da due assi rettangolari OY, OX condurre per M una traversale che stacchi dall'angolo retto un triangolo OAB di data superficie s^2. (R. Indicando con x il cateto dell'asse OX si ha: $b^2x^2 - 2s^2x + 2as^2 = 0$.

Se l'area si considera come somma di OMA e di OMB, si trova che per avere un trasversale uscente da un punto esterno all'angolo occorre far la differenza di queste aree e si ha una diversa equazione: $b^2x^2 + 2s^2x - 2as^2 = 0$).

41. Conoscendo i lati b e c di un triangolo e l'area m^2 del rettangolo dei segmenti BD, DC, presi i valori assoluti, determinati sul lato BC dall'altezza relativa a questo lato, determinare questo lato e costruire il triangolo.

(R. Indicando con x questo lato si ha: $x^4 \pm 4m^2x^2 - (b^2 - c^2)^2 = 0$, dove il segno $+$ vale pel triangolo ottusangolo in B o in C ed il segno $-$ pel triangolo acutangolo in B e C).

42. e **42**$_{bis}$. Inscrivere in una sfera di raggio r un cilindro retto tale che la sua superficie totale sia $2\pi s^2$ (o sia eguivalente alla differenza fra la superficie della sfera di raggio k e la superficie della sfera data).

(R. Se x è il raggio di base, $5x^4 - 2(2r^2 + s^2)x^2 + s^4 = 0$,
$5x^4 - 4k^2x^2 + 4(k^2 - r^2) = 0$).

43. Essendo dato un cerchio di raggio r e centro O, si conduca da un punto del diametro AB (esterno al cerchio) la tangente CD, e si faccia rotare la figura intorno ad AB. Determinare C in modo che il rapporto della superficie conica generata da CD alla zona che essa inviluppa sia m.

(R. Posto $x = \mathrm{OC}$ si trova un'equazione di 1^0 grado, $x = r(2m + 1)$.

44. Essendo data una semicirconferenza descritta sul diametro $\mathrm{AB} = 2r$, trovare sul segmento AB un punto M, tale che descritta la circonferenza (C) tangente in M ad AB ed alla semicirconferenza in un punto D, risulti $\mathrm{AM} + \mathrm{MC} + \mathrm{CD} = a$. Discutere e costruire il punto M.

(Posto $\mathrm{AM} = x$, $\mathrm{MC} = y$, $x + 2y = a$, $x^2 - 2rx + 2ry = 0$, $a \leq \frac{9}{4} r$).

45. Il doppio dell'area di un triangolo rettangolo è equivalente a quella di un quadrato di lato a e la somma dei quadrati delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa è equivalente ad un altro quadrato di lato b. Calcolare le proiezioni suddette e verificare che se a e b sono legate dalla relazione $5a^2 = 2\sqrt{3}b^2$ uno degli angoli acuti è di 30^0. (Licenza Istituto, 1906).

(R. Indicando con x, y, le proiezioni, z l'altezza, $2z^4 + b^2z^2 - a^4 = 0$).

46. Un cono è circoscritto ad una sfera di raggio r. Quale deve essere l'altezza del segmento sferico interno al cono, acciocché il volume del primo abbia un dato rapporto q col volume del secondo. Costruzione geometrica nel caso di $q = \frac{1}{4}$. (Licenza Istituto, 1906).

(R. Indicando con x la distanza della base del cono dal centro della sfera, $x^2 + 2rx - \frac{qr^2}{1-q} = 0$).

47. Determinare 3 numeri x, y, z essendo conosciuti i prodotti $2a$, $2b$, $2c$, di ognuno di essi per la somma degli altri due. Determinare le condizioni a cui debbono soddisfare i 3 numeri a, b, c perché il problema abbia soluzioni reali, e perché i numeri x, y, z riescano in quest'ordine in progressione geometrica. (R. $a : c = b - c : a - b$).

48. Un cono retto ha per raggio di base a e $3a$ per apotema. Inscrivere in esso un cilindro retto che abbia per superficie laterale $m\pi a^2$.

49. Data l'ipotenusa a e la bisettrice β dell'angolo retto di un triangolo rettangolo determinare i cateti. Discutere e costruire i risultati.

50. Determinare l'altezza ed il raggio di un cilindro retto la cui superficie totale è πm^2, e che è inscritto in una sfera di raggio r.

51. Un diametro AB di una sfera si prolunga di una lunghezza AC eguale al raggio della sfera stessa, e per un suo punto P, interno a questa, si conduce il piano perpendicolare al diametro stesso. Trovare la posizione del punto P in modo che l'area del cerchio di raggio PC abbia un dato rapporto m con quella del cerchio sezione del piano, con la sfera. Discussione e costruzione geometrica (Licenza Istituto, 1908).

(R. Posto $OP = x$, $(m + 1)x^2 - 4rx + r^2(4 - m) = 0$).

52. È conosciuta l'altezza h di un triangolo rettangolo ed è anche dato il rapporto m tra l'area laterale del cilindro che ha per raggio uno dei cateti e per lato l'altro cateto e la somma delle aree laterali dei due coni generati dalla rotazione del triangolo intorno all'ipotenusa. Si calcolino i cateti del triangolo e discutendo la soluzione si mostri che il minimo valore di m è $\sqrt{2}$, ed esaminare di che natura è il triangolo in questo caso. (Licenza Istituto, 1908).

53. Facendo rotare un triangolo rettangolo di un giro intero intorno a ciascuno dei cateti successivamente si hanno due coni. S'indichino con S' e con S'' le superficie laterali dei due coni e con S la superficie della sfera avente per diametro l'ipotenusa. Determinare i lati del triangolo nell'ipotesi che sia $aS' + bS'' = cS$ dove a, b, c sono numeri noti, e sia pur data la superficie s del triangolo. (Licenza Istituto, 1898).

(R. Indicando con x, y i cateti, $(c^2 - b^2)y^4 - 4absy^2 + 4s^2(c^2 - a^2) = 0$.

54 - 54$_{bis}$. Calcolare i raggi delle basi d'un tronco di cono retto circoscritto ad una sfera di raggio r conoscendo il suo volume πk^3 o la sua superficie totale πm^2.

55. Dato il raggio r del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo e la superficie s del triangolo costruire il triangolo.

56. Per un punto preso sulla bisettrice di un angolo retto a distanza a dai

suoi lati è condotta una retta che li taglia. Trovare i due cateti del triangolo rettangolo in modo che il rapporto tra la somma delle superficie laterali dei coni generati dal triangolo con le rotazioni intorno ai cateti, e la superficie del cerchio il cui raggio è l'ipotenusa sia un dato numero positivo m. Nella discussione si faccia vedere quali numeri siano possibili per m.

(Se x è un cateto, $(m^2-1)x^2-2am^2x+2a^2m^2=0$).

57. Determinare un triangolo rettangolo nel quale la somma dei cateti sia m, e quella dell'ipotenusa e dell'altezza corrispondente sia n, e indicare le condizioni perché il problema sia possibile e costruire i risultati.

(Licenza Istituto, Luglio 1894). $\left(\text{R. } m < n \leq \frac{3m}{2\sqrt{2}}\right)$.

58. Di un quadrilatero ABCD inscritto in un cerchio di raggio r il lato AD è un diametro del cerchio e gli altri lati formano una progressione aritmetica ed hanno per somma $3a$. Si determinino questi lati e le diagonali AC, BD, e si discutano i risultati trovando le condizioni di possibilità del problema e si cerchi la costruzione geometrica. (Licenza Istituto, 1894).

(R. Se x è la ragione della progressione, $(2r-a)x^2+3a^2x+a^3-4r^3=0$, $\frac{2r}{\sqrt{5}} < a \leq r$).

59. Calcolare i cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo conoscendo la differenza dei quadrati dei cateti k^2, e che i vertici stanno su tre rette parallele a, b, c assegnate mediante le distanze m, n di a, da b e da c.

(R. Indicando con x ed y le distanze di B e C dalla perpendicolare abbassata da A alle parallele si ha: $x^2-y^2=k^2+n^2-m^2$, $xy=mn$.

Oppure chiamando x ed y i cateti: $x^2-y^2=k^2$, $x^2(y^2-n^2)=y^2m^2$).

60. Di un triangolo rettangolo si conosce l'ipotenusa a, e la somma h dei cateti e dell'altezza relativa all'ipotenusa. Calcolare l'altezza relativa all'ipotenusa ed i cateti. (R. Indicando con x, y, i cateti, z l'altezza dell'ipotenusa si ha: $x^2+y^2=a^2$, $x+y+z=h$, $xy=az$).

61. Due circonferenze di centro O, O' e di raggi r, r' si toccano internamente. Descrivere una terza circonferenza tangente alle due prime ed alla linea dei centri OO'. (R. Sia O'' il centro del cerchio cercato, y il suo raggio, x la distanza del punto di contatto di esso con OO' dal centro O, si ha: $(r-y)^2=x^2+y^2$, $(y+r')^2=y^2+(r-r'+x)^2$).

62. Una sezione retta ABC di un prisma triangolare ha per lati $a, b, \sqrt{2ab}$, condurre per C un piano che sezioni il prisma secondo un triangolo equilatero MNC. (R. Indicando con x AM e con y BN si ha

$x^2+b^2=y^2+a^2=2ab+(y-x)^2$).

63. Dato un cono circolare retto di raggio r ed altezza h, si determini x in modo che il cono avente per altezza $h-x$, per raggio di base $r+x$ sia equivalente al cono dato. (R. $x[x^2+(2r-h)x+r(r-2h)]=0$).

64. Determinare i raggi di base di un tronco di cono a basi parallele che abbia l'altezza h media proporzionale fra i diametri delle basi, e la superfi-

cie totale equivalente a πa^2. (R. Indicando con x, y i raggi di base si ha:

$$xy = \frac{b^2}{h}, \quad x + y = \frac{\sqrt{2a^2 + h^2}}{2}).$$

65. Essendo dato un semicerchio costruito sul diametro AOB, si tracci la corda arbitraria AM che sottende l'arco ANM e si proietti ortogonalmenie M in P su AB. Calcolare AP in modo che facendo rotare la figura intorno ad AB il triangolo OMP e il segmento circolare ANM generino volumi equivalenti. Quanti valori di AP vi sono per i quali il rapporto del volume generato da ANM al volume generato da OMP abbia il valore di m?

(In questo esercizio il valore di m deve essere considerato positivo e negativo. Posto $AP = x$, $mx^2 - (3m + 1)rx + 2mr^2 = 0$).

66. Trovare i lati di un triangolo equilatero e di un quadrato di cui la somma delle aree è equivalente al quadrato di lato n, e la somma dei lati è eguale ad a. Discutere e costruire i risultati.

(R. $x^2(4 + \sqrt{3}) - 8ax + 4(a^2 - n^2) = 0$,

$$2n\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \leqq a \leqq n\sqrt{\frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}} \quad \text{ed anche} \quad n \leqq a < 2n\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}).$$

67. Un triangolo rettilineo rota di un giro intorno alla sua base. Data la base b l'altezza corrispondente h e la somma delle superficie laterali dei due coni generati dalla rotazione, calcolare i lati del triangolo Discutere i risultati. (Licenza Istituto, 1898).

(R. Indicando con x uno dei lati e con πr^2 la somma delle superficie

$$h\left(x + \sqrt{b^2 + x^2 \pm 2b\sqrt{x^2 - h^2}}\right) = r^2, \quad r \geqq h\sqrt{b^2 + 4h^2}.$$

Ponendo invece la somma delle superficie eguale a πhm e indicando con x, y i lati

$$t^2 - mt + \frac{(m^2 - b^2)^2 + 4b^2h^2}{4(m^2 - h^2)} = 0 \quad ; \quad m \geqq \sqrt{b^2 + 4h^2}).$$

68. Un cono rotondo è inscritto in una sfera di raggio r, calcolare qualcuno degli elementi del cono, p. es. l'altezza ovvero il seno dell'angolo che un lato qualunque fa con l'asse, in modo che la superficie totale di esso abbia un dato rapporto q con la zona sferica che ha la medesima altezza. Esaminare il caso particolare di $q = 1$, e fare la costruzione geometrica. (Licenza Istituto, 1907). (R. Sia x l'altezza, $x^2 + 2rx(2q - 1) + 4r^2q(q - 2) = 0$).

69. In un circolo di raggio r è inscritto un quadrilatero convesso ABCD, in modo che il primo vertice A o l'ultimo D sono estremi di un diametro. Calcolare i lati AB, BC, CD in modo che essi formino nell'ordine scritto una progressione aritmetica, e che la loro somma abbia un dato rapporto q col triplo del raggio. (Licenza Istituto, 1907).

(R. Indicando con x, y, z i lati, $z^2 - 2qrz + r^2\,\frac{5q^2 - 4}{2 - q} = 0$).

70. Data una sfera di raggio r tagliarla con due piani di cui le distanze dal centro abbiano per somma d, in modo che la somma delle due superficie laterali dei coni retti, aventi per basi le sezioni e circoscritti alla sfera sia equivalente ad un cerchio di raggio m. (R. Indicando con z la distanza di uno dei piani dal centro della sfera, $z^2 - dz + \frac{r^3 d}{m^2 + rd} = 0$).

71. Data la differenza delle distanze di due piani seganti una sfera dal centro, trovare le distanze dei piani stessi dal centro, sapendo che la differenza delle superficie laterali coniche circoscritte alla sfera ed aventi le basi nei cerchi di sezione $= \pi m^2$. (R. $x^2 + dx - \frac{dr^3}{m^2 - rd} = 0$. Il problema diventa di 3° grado se si domanda la somma delle superficie coniche dando la differenza della distanza, o viceversa).

72. Calcolare i cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo conoscendo l'altezza h dell'ipotenusa, ed il raggio r del cerchio inscritto.

(R. Indicando con x, y i cateti e con z l'ipotenusa si ha:

$$x^2 + y^2 = z^2 \,,\; xy = hr \,,\; r(x + y + z) = hz.)$$

73. e **73_{bis}.** In un triangolo di cui è data la base a e l'altezza relativa h si vuole inscrivere un rettangolo con un lato sulla base del triangolo e tale che la sua diagonale sia n (oppure tale che la differenza dei quadrati dei lati sia h^2).

(Indicando con x l'altezza del rettangolo si ha:

$$(a^2+h^2)x^2 - 2a^2hx + h^2(a^2 - n^2) = 0 \,,$$

oppure

$$(a^2 - h^2)x^2 - 2a^2hx + h^2(a^2 - k^2) = 0 \,.$$

74. e **74_{bis}.** Determinare le lunghezze x, y, z degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo sapendo che essi sono in progressione geometrica (o aritmetica) che la superficie totale è $2s^2$ e la diagonale è d.

$$\left(\text{R.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \\ xy + yz + zx = s^2 \end{cases} \; x + y + z = \sqrt{2s^2 + d^2} \quad \begin{matrix} \\ xz = y^2 \text{ (oppure } x + z = 2y) \end{matrix} \right).$$

75. Sull'asse di un tronco di cono retto a basi parallele, di cui sono r, r' i raggi di base, h l'altezza, trovare un punto tale che i coni aventi il vertice in esso, e per basi le basi del tronco abbiano superficie laterali equivalenti. (R, Se x è la distanza del punto dalla base di raggio r' si ha: $(r^2 - r'^2)x^2 - 2r^2hx + r^4 - r'^4 + r^2h^2) = 0$. Se x è la distanza dalla base inferiore $(r^2 - r'^2)x^2 + 2r'^2hx + (r^4 - r'^4 - r'^2h^2) = 0$).

76. Inscrivere in una sfera di raggio r un tronco di cono retto di altezza h e di volume equivalente a $\frac{1}{3}\pi\, a^2 h$. (R. Indicando con x, y i raggi di base e z l'apotema, se ABCD è la sezione meridiana del tronco si ha:

$$x^2 + xy + y^2 = a^2 \,,\; (x - y)^2 = z^2 - h^2 \,,\; (x + y)^2 = \mathrm{AC}^2 - h^2 \,,\; z\mathrm{AC} = 2rh \,,$$

e quindi

$$z^4 - 4(a^2 + b^2)z^2 + 12r^2h^2 = 0) \,.$$

77. Dato un semicerchio di diametro AB $= 2r$ e di centro O condurre una corda CD parallela ad AB in modo che ruotando la figura intorno al raggio perpendicolare ad AB il volume del segmento sferico a due basi risultante stia al tronco di cono in esso inscritto nel rapporto m. (R. Indicando con x la metà della corda CD, si ha: $(1-m)x^2 - mrx + (2-m)r^2 = 0$).

78. Determinare i lati di un triangolo rettangolo conoscendone l'area ed il raggio del cerchio inscritto. (Licenza Istituto 1882). (R. Indicando con x, y i cateti e z l'ipotenusa si ha: $xy = 2s^2$, $x + y + z = \frac{2s^2}{r}$, $x^2 + y^2 = z^2$)

79. Trovare le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo sapendo il perimetro $2p$ e l'altezza relativa all'ipotenusa h. (Licenza Istituto, 1887). (R. Indicando con x, y i cateti, z l'ipotenusa, si ha: $x+y+z=2p$, $xy=hz$, $x^2 + y^2 = z^2$. Minimo perimetro quando $\frac{p}{h} = \sqrt{2} + 1$. Massima altezza $\frac{h}{p} = \sqrt{2} - 1$).

80. Per un punto M dato nell'interno di un angolo retto YOX distante p e q dai suoi lati OY, OX condurre una traversale PMQ tale che la somma dei quadrati dei segmenti PM, MQ sia equivalente ad a^2. (Lic. Istituto, 1887). (R. Indicando con x il segmento OP$-p$, si ha: $x^4+(p^2+q^2-a^2)x^2+p^2q^2=0$).

81. In un circolo di raggio r è inscritto un triangolo ACB, rettangolo in C, e l'ipotenusa AB è proiettata in A'B' sulla tangente in C. Trovare i valori dei cateti CA, CB, in modo che il volume del tronco di cono generato dalla rotazione del trapezio AA'B'B intorno ad A'B' abbia un dato rapporto m col volume della sfera di diametro A'B'. (Licenza Istituto, Luglio 1909). (R. Posto AC $= x$, CB $= y$, $x^4 - 4r^2x^2 + \frac{16r^4}{1 + 2m} = 0$).

82. I punti ABCD sono successivamente vertici di un quadrato di lato a. Trovare a qual distanza da A sulla retta indefinita AB si trova un punto P in modo che sia $\frac{\text{CP}}{\text{DP}} = m$, dove m è un numero dato. Mostrare che i valori massimo e minimo di m sono rispettivamente $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ed indicare in tal caso la posizione del punto P. (Licenza Istituto, Luglio 1909) (R. Indicando AP con x, si ha: $(1-m^2)x^2-2ax+a^2(2-m^2)=0$).

83. I punti ABCD sono vertici consecutivi di un rettangolo, di cui si conosce il perimetro $2p$. Prolungando BA in E, in modo che AE sia eguale ad AB si unisca E con C, e si faccia rotare di un giro la figura intorno ad AB. Conoscendo il rapporto m tra la superficie totale del cilindro generato da ABCD e quella del cono generato dal triangolo BEC, si calcolino i valori di AB e BC e si discutano i risultati. (Licenza Istituto, Ottobre 1909). (R. Indicando AB con x, si ha $m^2x^2 - mpx + p^2(m-1) = 0$).

84. I punti ABCD sono vertici consecutivi di un quadrato di lato a, e P è un punto del lato AB.

Rotando il quadrato di un giro intorno al lato AB, i triangoli APD, BPC generano due coni. Quale posizione dovrà avere il punto P, in modo che

la somma delle superficie laterali dei due coni sia equivalente alla superficie di un cerchio di raggio r? (Licenza Istituto 1909).

(R. Posto $AP = x$, $x^2 - ax + \frac{6a^4r^4 - r^8 - a^8}{4a^2(r^4 - a^4)} = 0$; Si ponga anche $OP = x$).

85. In un triangolo rettangolo l'ipotenusa ed i due cateti sono in progressione geometrica. Calcolare e costruire geometricamente il coseno dell'angolo che l'ipotenusa forma col cateto più piccolo.

Trovare poi la lunghezza dei lati sapendo la somma di due qualunque di essi. (Licenza Istituto, Luglio 1910). Si aggiunga la costruzione geometrica dei triangolo. $\left(\cos\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ (R. Indicando con x , y , z i lati, nell'ipotesi che sia $x + z = a$, $z^2 + az - a^2 = 0$).

86. Dato il diametro $2r$ di una circonferenza, trovare a qual distanza dal centro bisognerà condurre la corda perpendicolare ad esso acciocché la differenza delle aree dei triangoli che hanno per base la corda e per vertici gli estremi del diametro sia eguale ad mr^2 , dove m è un numero.

Mostrare che per $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ la corda sottende al centro un angolo di 60° o 120°. (Licenza Istituto, Luglio 1910). (R. $4x^4 - 4r^2x^2 + m^2r^2 = 0$).

87. Due corde AB , AC uscenti da un punto A di una circonferenza di raggio r , fanno fra loro un angolo φ ed hanno la somma eguale ad un segmento dato a. Trovare la lunghezza delle corde e discutere la soluzione. Applicazione ad uno qualunque dei casi nei quali $\varphi = 30°$, $\varphi = 60°$, $\varphi = 90°$. (Licenza Istituto, Ottobre 1910). Si aggiunga la costruzione delle corde.

(R. Prendendo per incognita l'angolo ω della bisettrice dell'angolo delle corde col diametro che passa pel punto comune alle corde, si ha

$$\cos\omega = \frac{a}{4r\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$AB = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{16r^2\cos^2\frac{\varphi}{2} - a^2} \ , \ AC = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{16r^2\cos^2\frac{\varphi}{2} - a^2}).$$

Vi è una costruzione geometrica semplicissima.

Prendendo una corda eguale ad x e trovando il valore della corda BC che sottende l'angolo BAC in $2r$ sen φ si ha pure facilmente AB ed AC).

88. Calcolare le misure in 3 lati di un triangolo rettangolo conoscendosi la sua area a^2 e quella πs^2 della superficie totale del solido generato dalla rotazione del triangolo intorno all'ipotenusa.

Discutere i risultati (Licenza Istituto, Ott. 1910). (R. Indicando con x , y i lati e con z l'ipotenusa si ha

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = a\left(\frac{s^2}{\sqrt{s^4 - 4a^4}} \pm \sqrt{\frac{8a^4 - s^4}{s^4 - 4a^4}}\right), \quad z = \frac{4a^3}{\sqrt{s^4 - 4a^4}} \ ).$$

89. In un circolo sono condotte due corde tra loro perpendicolari che si tagliano internamente ad esso. Calcolare la lunghezza delle medesime, co-

noscendosi la loro somma $2a$, la misura del raggio del circolo r e l'area k^2 del rettangolo contenuto dalle due parti in cui ciascuna corda è divisa dall'altra. Discussione dei risultati.

(R. Indicando con x, y le corde si ha $\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a \mp \sqrt{8(r^2+b^2)-a^2}}{2}$).

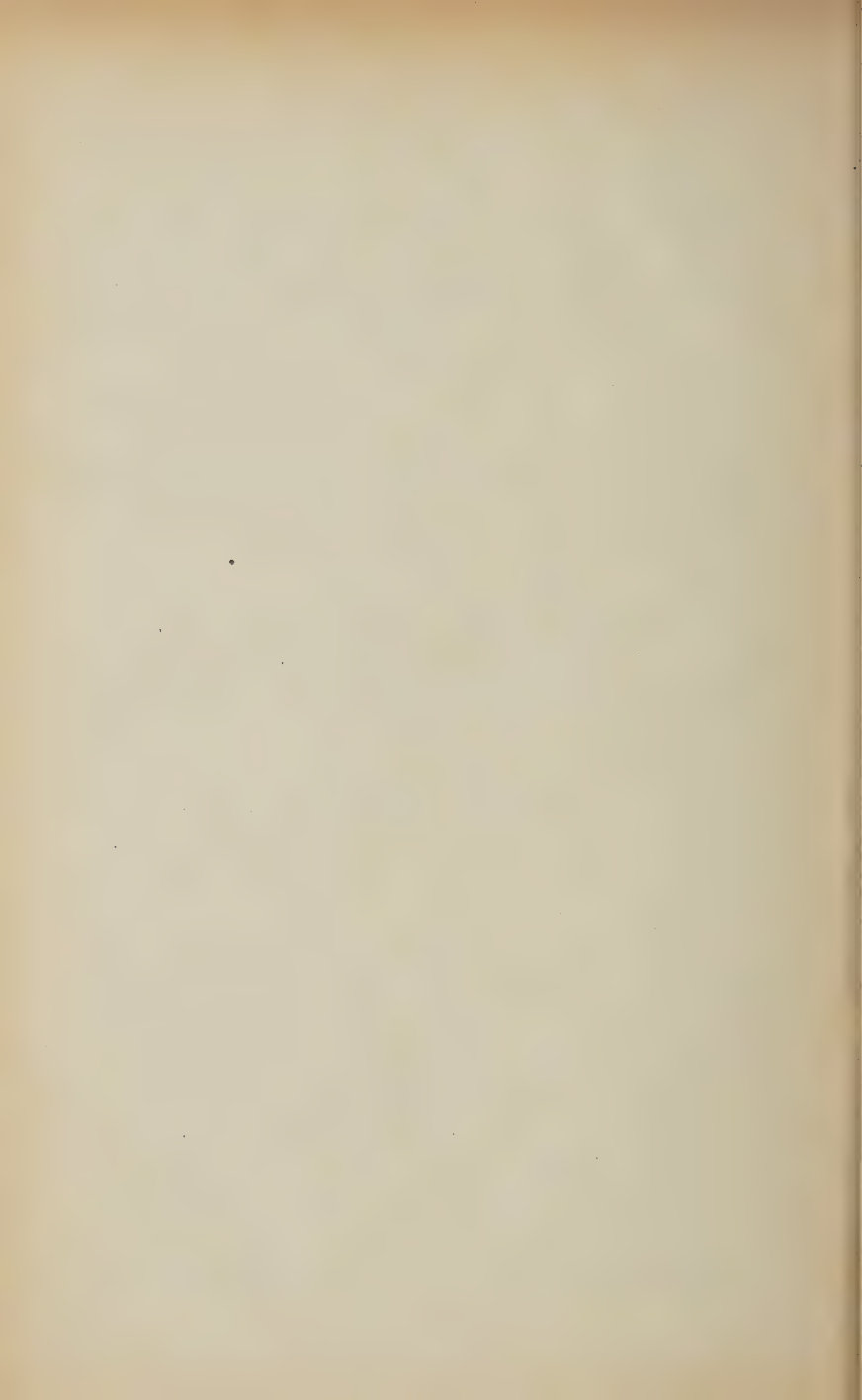
90. Un tetraedro regolare è segato da un piano parallelo ad una delle facce in un triangolo che si assume per base di un prisma retto inscritto nel tetraedro. A quale distanza dal vertice opposto a quella faccia bisogna condurre il piano secante, in modo che l'area laterale del prisma sia eguale a quella di un quadrato dato? (Licenza Istituto, Luglio 1911).

(R. Posto $l =$ lato, $h =$ altezza del tetraedro, $h = l\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x =$ distanza della sezione dal vertice, $a^2 =$ quadrato dato, $3lx^2 - 3hlx + ha^2 = 0$).

91. Calcolare il seno dell'angolo C che un cateto di un triangolo rettangolo forma con l'ipotenusa, conoscendosi il rapporto k di questo cateto con la proiezione dell'altro sull'ipotenusa.

Considerando poi i casi particolari in cui sia $k = 1$, $k = \frac{1}{2}$ si dia l'interpetrazione geometrica dei valori che acquista allora il seno medesimo. (Licenza Istituto, Ottobre 1911). (R. $k\cos^2 C + \cos C - k = 0$).

92. Data una sfera tagliarla con un piano in guisa che il cerchio sezione sia equivalente alla differenza fra la superficie di una delle calotte risultanti e la superficie laterale del cono avente la stessa base e la stessa altezza di quella calotta.

Mostrare poi che l'angolo α formato dall'apotema del detto cono col piano secante soddisfa all'equazione $\tan^4\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$. (Licenza Istituto, Ottobre 1911). (R. Posto $x =$ altezza del cono, $x^2 + 2rx - 4r^2 = 0$).

APPENDICE

BREVI CENNI SULLE SEZIONI CONICHE
CONSIDERATE COME SEZIONI DI UN CONO CIRCOLARE RETTO

Definizioni.

1. Se una superficie conica di rotazione, considerata completata dalla falda ad essa opposta al vertice, si seziona con un piano, che non passi pel suo vertice, si ottengono delle curve che diconsi *sezioni coniche* [1]), e più semplicemente *coniche*.

Di queste curve noi vogliamo qui assegnare le più essenziali proprietà, che possano permettere: di costruirle indipendentemente dal modo con cui esse si sono ottenute dal cono, e risolvere i più essenziali problemi grafici che le riguardano.

2. Osserviamo innanzi tutto che queste curve si possono ridurre a tre tipi soltanto.

Quando il piano segante non è parallelo ad alcuna delle generatrici, esso incontra tutte le generatrici della superficie conica in una sola delle due falde e si ha una curva chiusa, che prende nome di *Ellisse*; essa riducesi ad una *circonferenza*, se il piano segante è perpendicolare all'asse di rotazione della superficie.

Quando il piano segante è condotto parallelamente ad una soltanto delle generatrici della superficie, cioè parallelamente ad un piano tangente della superficie, esso incontra tutte le altre generatrici pure in una sola delle falde della superficie, e la curva aperta che si ottiene dicesi *Parabola*.

[1]) Si avverta che ogni altra superficie conica, che non sia di rotazione, purché abbia per direttrice una *sezione conica*, è segata da un piano, che non passi pel suo vertice, sempre in una sezione conica. Per la dimostrazione di questo teorema si vegga: Amodeo, *Lezioni di Geometria proiettiva*, p. 300, 3ª ed., 2ª ristampa con appendice, Pierro, 1920.

Quando il piano segante si conduce parallelamente a due generatrici distinte della superficie, esso incontra entrambe le falde della superficie, e si ha una curva aperta formata di due rami, che dicesi *Iperbole*.

3. Sia V il vertice della superficie conica di rotazione ed XX', YY' due generatrici opposte (cioè contenute in un piano che passi per l'asse di rotazione). Conduciamo il piano segante α, perpendicolarmente al piano XVY, per una retta A_1A_2 di esso che congiunga due punti di queste generatrici situati nella stessa falda; il piano α segherà tutte le generatrici della superficie in questa falda e si avrà (fig. 1.ª) la curva $A_1MA_2A_1$ detta *Ellisse*.

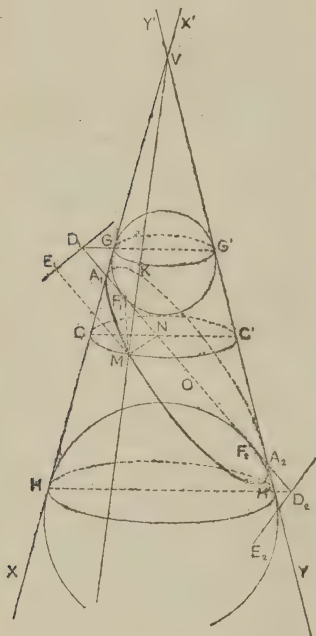



Fig. 1.ª

I punti A_1 e A_2 diconsi *vertice* dell'*Ellisse*, la retta A_1A_2 dicesi *asse focale* dell'ellisse, il punto medio O di A_1A_2 dicesi *centro* dell'ellisse. Il segmento A_1A_2 dicesi lunghezza dell'asse focale, e lo indicheremo costantemente con $2a$; sicchè $OA_1 = OA_2 = a$,

I punti del piano della conica interni al cono si dicono anche *interni* all'ellisse.

4. Nell'interno dell' angolo XVY si descrivano le circonferenze tangenti ai lati del triangolo VA_1A_2, e siano F_1, F_2 i punti di contatto di queste circonferenze con A_1A_2 e G, H, G', H' i punti di contatto di esse con le rette XV, YV.

I punti F_1, F_2 si dicono *fuochi* dell'*Ellisse*.

Se immaginiamo che le circonferenze suddette rotino intorno all'asse della superficie conica, esse descriveranno due sfere inscritte nella superficie conica, che la toccheranno

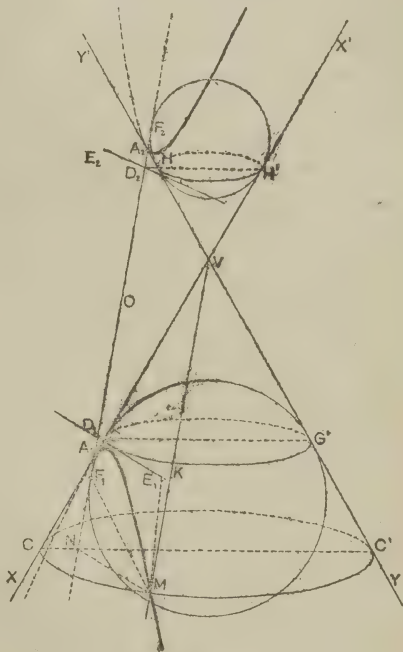
lungo le due circonferenze GG', HH', i cui piani β, β' sono perpendicolari all'asse di rotazione e quindi perpendicolari anche al piano XVY.

I piani β, β' segheranno il piano α in due rette D_1E_1, D_2E_2 perpendicolari al piano XVY, e quindi alla retta A_1A_2. Le rette D_1E_1, D_2E_2 diconsi *direttrici* della *Ellisse*, i punti D_1, D_2 in cui esse incontrano l'asse A_1A_2 dell'Ellisse si dicono *piedi* delle direttrici.

Allorquando l'Ellisse riducesi ad una *circonferenza* (e perché ciò avvenga occorre che il triangolo A_1VA_2 sia isoscele) i fuochi coincidono col centro della circonferenza e le direttrici non esistono, e si suol dire che si confondono in una sola nella retta all'infinito del piano. Ma è bene avvertire che questa frase si può usare solo quando, in un corso di *Geometria proiettiva*, si sia ben fatto capire per qual motivo si introducono i punti all'infinito e la retta all'infinito del piano.

Qui invece non terremo conto della circonferenza quando debbasi parlare delle direttrici delle coniche.

Fig. 2.ª

5. Essendo sempre XX', YY' due generatrici opposte della superficie conica, conduciamo il piano segante α perpendicolarmente al loro piano per la retta A_1A_2 che congiunga due punti di queste direttrici situati ciascuno in una falda. Il piano α segherà tutte le generatrici della superficie conica eccetto due ed avremo per sezione la curva detta *Iperbole* (fig. 2.ª). I punti

A_1 e A_2 diconsi *vertici* della iperbole, la retta A_1A_2 dicesi *asse focale* o *asse trasverso* dell'iperbole, il punto medio O di A_1A_2 dicesi *centro* dell'iperbole. Il segmento A_1A_2 dicesi *lunghezza* dell'asse trasverso della iperbole; qui lo indicheremo costantemente con $2a$, sicché $OA_1 = OA_2 = a$.

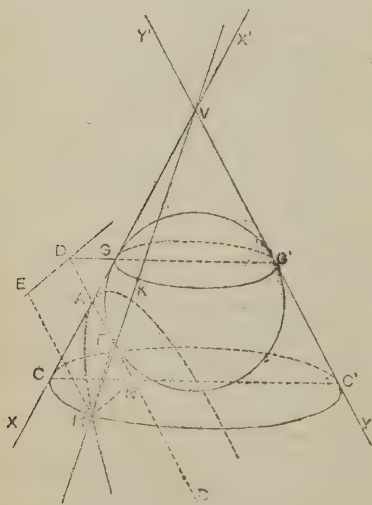
I punti del piano della conica interni al cono, si dicono anche *interni* all'iperbole.

6. Negli angoli $XVY, X'VY'$ si descrivano le circonferenze tangenti ai lati del triangolo A_1VA_2, e siano F_1, F_2 i punti di contatto di queste circonferenze con A_1A_2, e G, H, G', H' i punti di contatto di esse con le rette XX', YY'. I punti F_1, F_2 si dicono *fuochi* dell'iperbole.

Facendo rotare le suddette circonferenze intorno all'asse della superficie conica, esse descriveranno due sfere inscritte nella superficie conica, che la toccheranno lungo le circonferenze GG', HH', i cui piani β, β' segheranno il piano α nelle due rette D_1E_1, D_2E_2, perpendicolari ad A_1A_2. Le rette D_1E_1, D_2E_2 diconsi *direttrici* dell'iperbole; i punti D_1, D_2 si dicono pure *piedi* delle direttrici.

7. Conduciamo infine il piano segante α perpendicolarmente al piano XVY per una retta AB condotta per un punto A di XX' parallelamente all'altra generatrice ad essa opposta; esso segherà tutte le generatrici della superficie, eccetto YY', ed avremo per sezione la curva detta *Parabola* (figura 3.ª).

Fig. 3.ª

Il punto A dicesi *vertice* della parabola; la retta AB dicesi *asse* della parabola; qui non è il caso di considerare la lunghezza dell'asse.

I punti del piano della conica interni al cono, si dicono anche *interni* alla parabola.

8. Si descriva nell'interno dell'angolo XVY la circonferenza tangente alla retta AB, e sia F il suo punto di contatto con AB, e G, G' i punti di contatto con le generatrici VX, VY. Il punto F dicesi *fuoco* della Parabola.

Facendo rotare la circonferenza suddetta intorno all'asse della superficie conica essa descriverà una sfera, che tocca la superficie conica lungo la circonferenza GG', il cui piano β sega il piano α in una retta DE perpendicolare ad AB. La retta DE dicesi *direttrice* della parabola; il punto D è il *piede* della direttrice.

9. Ogni segmento che congiunge un punto dell'ellisse o dell'iperbole con uno dei suoi fuochi, o un punto della parabola col fuoco, dicesi *raggio focale* della curva.

Proprietà delle sezioni coniche.

10. Teor. I.° *I fuochi dell'ellisse e dell'iperbole equidistano dal centro.*

Infatti, dalla fig. 1.ª si deduee che

$$GH = GA_1 + A_1H = A_1F_1 + A_1F_2 = 2A_1F_1 + F_1F_2 ,$$
$$G'H' = A_2F_2 + A_2F_1 = 2A_2F_2 + F_1F_2 ,$$

e poiché $GH = G'H'$, risulta pure

$$A_1F_1 = A_2F_2 ,$$

e quindi $$OF_1 = OF_2 .$$

Dalla fig. 2.ª, si deduce che

$$GH' = A_1H' - A_1G = A_1F_2 - A_1F_1 = F_1F_2 - 2A_1F_1 ,$$
$$HG' = A_2G' - A_2H = A_2F_1 - A_2F_2 = F_1F_2 - 2A_2F_2 ,$$

e poiché $GH' = HG'$, si deduce che

$$A_1F_1 = A_2F_2 ,$$

e perciò $$OF_1 = OF_2 .$$

II. Teor. 2.° *In ogni sezione conica, fatta eccezione per la circonferenza, il rapporto delle distanze di un punto qualunque della curva da un fuoco e dalla corrispondente direttrice è costante.*

a) Consideriamo dapprima il caso dell'ellisse e dell'iperbole (fig. 1.ª e 2.ª). Scegliamo un punto qualunque M della curva e da esso conduciamo il piano perpendicolare all'asse della superficie conica. Esso sezionerà la superficie conica secondo una circonferenza CMC' e taglierà il piano della sezione conica secondo la retta MN, la quale evidentemente risulta perpendicolare al piano XVY e quindi perpendicolare all'asse A_1A_2 della sezione conica. Inoltre D_1N è eguale alla distanza del punto M dalla direttrice D_1E_1. Per dimostrare quindi il teorema proposto occorre far vedere che il rapporto $\frac{MF_1}{D_1N}$ è costante al variare del punto M.

Infatti, se s'indica con K l'intersezione della generatrice MV della superficie conica col cerchio di contatto di essa con la sfera GG', sarà $MF_1 = MK$, perché esse sono tangenti condotte dal medesimo punto M alla stessa sfera; ed inoltre giacché VM è uguale a VC come apotemi dello stesso cono circolare retto, e $VK = VG$ per la medesima ragione, è pure $MK = CG$ e quindi ancora $MF_1 = CG$.

Laonde: $$\frac{MF_1}{D_1N} = \frac{CG}{D_1N} \qquad (1)$$

Ora le due rette NC e D_1G, essendo parallele, determineranno sulle rette A_1N e A_1G segmenti proporzionali perciò

$$\frac{CG}{D_1N} = \frac{A_1G}{A_1D_1} ;$$

ma $A_1G = A_1F_1$, perché tangenti condotte da uno stesso punto alla stessa sfera, perciò la precedente proporzione può scriversi:

$$\frac{CG}{D_1N} = \frac{A_1F_1}{A_1D_1}$$

e per la (1)

$$\frac{MF_1}{D_1N}=\frac{A_1F_1}{A_1D_1}.$$

Cioè il rapporto delle distanze del punto variabile M dal fuoco F_1 e dalla corrispondente direttrice è costantemente uguale al rapporto delle distanze del punto fisso A_1 dal medesimo fuoco e dalla medesima direttrice.

Questo rapporto è pure eguale al rapporto $\frac{A_2F_1}{A_2D_1}$, quindi dalle figure 1.ª e 2.ª risulta che il suddetto rapporto costante è <1 nell'ellisse ed è >1 nell'iperbole.

Poichè $\frac{CG}{D_1N}=\frac{CH}{ND_2}=\frac{MF_2}{ND_2}$ si conchiude che *il rapporto della distanza di* M *da un fuoco e dalla corrispondente direttrice è lo stesso per entrambi i fuochi.*

b) Consideriamo ora il caso della parabola. In essa (figura 3.ª) $MF=MK=C'G'$ e perciò si ha pure, come per le precedenti curve,

$$\frac{MF}{DN}=\frac{C'G'}{DN};$$

ma $C'G'=DN$, perché segmenti paralleli compresi fra rette parallele; dunque il rapporto suddetto è costantemente eguale all'unità. Dunque: *nella parabola ogni punto dista egualmente dal fuoco e dalla direttrice.* Il vertice A della parabola è punto medio del segmento FD.

12. ECCENTRICITÀ. Il rapporto costante delle distanze di ogni punto della conica da ogni fuoco e dalla corrispondente direttrice si dice *eccentricità* della conica, e si indica con la lettera k.

Sicché l'eccentricità delle coniche è <1 nell'*ellisse*, >1 nell'*iperbole*, $=1$ nella *parabola*.

Vedremo più innanzi (n.º **18**) che la circonferenza si può considerare come una ellisse di *eccentricità* $=0$.

13. Teor. 3.º *Una conica è incontrata da una retta del suo piano in non più di due punti.*

Se questa proprietà la vogliamo ricavare dal cono direttamente, basterà osservare che la retta del piano della conica ed il vertice del cono determinano un piano che non può segare la superficie conica in più di due generatrici, e quindi due punti al più la retta può avere comuni con la conica. Se invece vogliamo ricavarla direttamente dalla conica, diremo:

Difatti, supponiamo che una retta, che congiunga due punti della curva M, M', possa incontrare la curva in un terzo punto M''.

Indicando con F_1 un fuoco (o il fuoco), con d la direttrice corrispondente, e con (M, d) la distanza di M da d si dovrebbe avere, per l'ipotesi fatta,

$$\frac{MF_1}{(M,d)} = \frac{M'F_1}{(M',d)} = \frac{M''F_1}{(M'',d)} .$$

Ma, se S è il punto d'intersezione di MM' con d, si avrebbe pure

$$\frac{(M,d)}{MS} = \frac{(M',d)}{M'S} = \frac{(M'',d)}{M''S} ,$$

dunque si avrebbe

$$\frac{MF_1}{MS} = \frac{M'F_1}{M'S} = \frac{M''F_1}{M''S} .$$

Per i primi due rapporti eguali la retta F_1S dovrebbe essere bisettrice dell'angolo MF_1M', e per i due ultimi rapporti dovrebbe essere bisettrice dell'angolo $M'F_1M''$, dunque due angoli con un lato solo comune avrebbero la stessa bisettrice, il che è assurdo. Perciò è pure assurdo che la retta MM' incontri ulteriormente la conica.

Se risultasse MM' parallela alla direttrice, si dovrebbe avere $MF_1 = M'F_1 = M''F_1$, il che è assurdo.

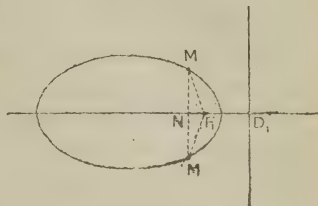
Per questa proprietà le coniche si dicono curve di *2° ordine*, perchè in generale una curva algebrica piana si dice di *n^{mo} ordine* quando essa è incontrata da ogni retta del piano in un numero di punti non maggiore di n; e le coniche, come si vodrà nei n. **16** e **37** sono curve rappresentabili con equazioni algebriche.

14. Teor. 5.° *Le sezioni coniche sono simmetriche rispetto all' asse focale.*

Invero, se si immagina prolungata la perpendicolare MN condotta dal punto M della curva all'asse focale fino ad incontrare di nuovo la conica in M' si ha in virtù del teorema del n. **11**

$$\frac{MF_1}{D_1N}=\frac{M'F_1}{D_1N}$$

Fig. 4.ª

e perciò $MF=M'F$; e quindi, a causa dell'eguaglianza dei triangoli rettangoli $MF_1N, M'F_1N$ risulta $MN=M'N$, il che dimostra il teorema.

15. Teor. 4.° *Ogni punto del piano di una parabola e che non appartiene alla parabola, non dista egualmente dal fuoco e dalla direttrice della parabola.*

Sia F il fuoco della parabola, ED la sua direttrice (fig. 4.ª) e QMM' una retta perpendicolare all'asse FD della parabola, nel punto R, che incontri la parabola in M ed M'. Se ME è la perpendicolare abbassata da M sulla direttrice, deve essere pel teor. 2.°
$MF=ME=RD.$

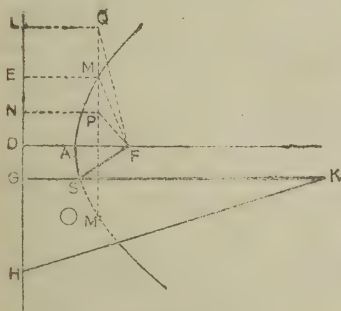
Fig. 5.ª

Se P è un punto della retta QR compreso fra M ed M', ed N è la sua proiezione sulla direttrice, si ha:

$$PF<FM \quad , \quad PN=RD,$$

quindi $PF<PN$.

Se invece Q è un punto della retta QR esterno al segmento MRM' ed L è la sua proiezione sulla direttrice si ha:

$$QF>MF \quad , \quad QL=ME,$$

quindi

$$QF > QL \, .$$

Tutti i punti del piano che distano dal fuoco meno di quanto distano dalla direttrice sono interni alla parabola; quelli che distano dal fuoco più di quanto distano dalla direttrice sono esterni alla parabola.

Da questo teorema e dal teorema del n. **11**, *b*, si conchiude il seguente

Scolio: *Dati in un piano un punto ed una retta, il luogo geometrico dei punti del piano, che sono equidistanti dal punto e dalla retta, è una parabola, che ha il punto dato per fuoco e la retta data per direttrice.*

16. Equazione della parabola. Si prendano come assi di coordinate la retta FD e la tangente al vertice A e si ponga $FD = p$ (veggasi fig. 16ª).

Dal triangolo MHF si ha:

$$MF^2 = HF^2 + HM^2 \, ,$$

e poiché

$$MF = ME = x + \frac{p}{2} \, , \quad HF = x - \frac{p}{2} \quad \text{ed} \quad HM = y$$

risulta

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

$$y^2 = 2px \, .$$

Il coefficiente $2p$ si dice *parametro* della parabola, ed è eguale all'ordinata corrispondente al fuoco,

17. Problemi. Si possono applicare i teoremi dei n.ⁱ **11** e **12** ai seguenti problemi:

Probl. I.° *Dati un fuoco* F_1, *la corrispondente direttrice* d *ed un punto* P *di una ellisse o iperbole, costruirne i vertici dell'asse focale e il secondo fuoco.*

La perpendicolare F_1D condotta da F_1 alla direttrice,

dà la direzione dell'asse focale. Si congiunga P con F_1, si abbassi PQ perpendicolare a d, e si tiri QF_1, le bisettrici dell'angolo P dividono QF_1 internamente ed esternamente nel rapporto di PF_1 a PQ, mediante i punti R, R'. Abbassando le perpendicolari da R e da R' ad FD si avranno i vertici A_1 e A_2 della conica.

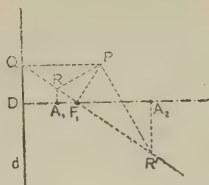



Fig. 6.ª

Per l'ipotesi fatta sulla natura della curva non deve essere $PF_1 = PQ$.

Se fosse $PF_1 = PQ$, si avrebbe con la stessa costruzione il solo vertice A_1 della conica, che risulterebbe essere in tal caso una parabola.

Probl. 2.° *Costruire per punti e per moto continuo una parabola, di cui si conosca il fuoco e la direttrice.*

Sulla direttrice si faccia scorrere il cateto GH di una squadra GHK al cui estremo K è legato un filo, non elastico, che abbia l'altro estremo legato nel fuoco e sia lungo quanto il cateto GK (fig. 5.ª). Un lapis che tenga con la punta in S sempre teso il filo descriverà la parabola, perchè risulta sempre $SF = SG$.

Probl. 3.° *Trovare i punti d'incontro di una retta con una parabola data dal fuoco* F *e dalla direttrice* d.

Sia r la retta e supponiamo che siano M, M' i punti in cui essa incontra la parabola. Essendo MF eguale alla distanza (M, d), se descriviamo la circonferenza di centro M e raggio MF essa sarà tangente alla retta d, e passerà per F; ed analogamente la circonferenza di centro M' e raggio $M'F$ sarà tangente alla retta d, passerà per F, e segherà la prima circonferenza in un altro punto F' simmetrico di F rispetto alla retta data r.

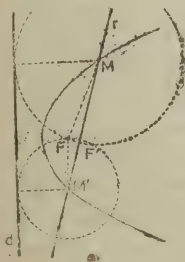



Fig. 7.ª

Perciò, i centri M, M' delle circonferenze tangenti alla direttrice d, che passano pel fuoco F e pel punto F' simmetrico del fuoco rispetto ad r, sono punti richiesti.

La costruzione dei punti M, M' è quindi ricondotta ad un problema noto di Geometria elementare, e perciò basta trovare il punto d'incontro O della direttrice con la retta FF' trovare la media proporzionale fra OF ed OF' e portarla sulla direttrice a destra e sinistra di O. Elevando dai suoi estremi le perpendicolari alla direttrice, queste determineranno sulla retta data i punti MM'.

18. Teor. 6.° *Nell'ellisse e nell'iperbole il rapporto costante delle distanze di un punto qualunque della conica da un fuoco e dalla corrispondente direttrice è eguale al rapporto delle distanze del centro della conica da un fuoco e da un vertice, cioè* $= \frac{OF_1}{OA_1}$ (fig. 8.ª e 9.ª).

Infatti poichè $\frac{A_1F_1}{A_1D_1} = -\frac{A_2F_1}{A_2D_1}$, i punti A_1 e A_2 separano armonicamente [1]) i punti D_1 ed F_1; e perciò essendo O il

---

[1]) Gruppo armonico. Si tenga presente che: *quattro punti ABCD di una retta, considerati in quest'ordine, si dicono armonici allorquando il rapporto delle distanze dei primi due punti dal terzo è eguale e di segno contrario al rapporto delle distanze degli stessi punti dal quarto*, cioè quando si ha la proporzione

$$AC : CB = AD : BD\ .$$

Si dice in tal caso che il gruppo $ABCD$ è armonico.

Se i punti ABCD *sono armonici, sono armonici pure i punti* ABDC, CDAB, CDBA.

Infatti, scambiando i rapporti, o permutando i medii, o permutando gli estremi della proporzione precedente si hanno le proporzioni riguardanti questi altri gruppi.

I punti A e B, ed i punti C e D si dicono fra loro *coniugati*, e si dice pure che la coppia AB è separata armonicamente dalla coppia CD.

Le bisettrici dell'angolo O di un triangolo OAB determinano sul lato AB due punti CD che insieme ad AB formano un gruppo armonico $ABCD$.

Per costruire quattro punti armonici quando è dato il rapporto delle distanze $= \frac{m}{n}$, in valore assoluto, si conducono per A e B due rette parallele; sulla prima si prende un segmento $AM = m$, sull'altra si prendono due segmenti BN, BN' eguali ad n ed opposti fra loro, si congiunge M con N ed M con N' i punti in cui le rette MN, MN' segano AB, saranno i punti C e D.

Dalla definizione del gruppo armonico si deduce immediatamente la se-

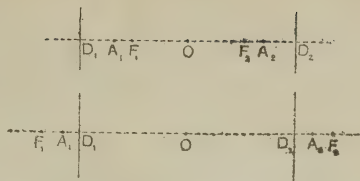
punto medio A_1A_2, si ha:

$$OA_1^2 = OF_1 \cdot OD_1;$$

cioè si ha la proporzione:

$$\frac{OA_1}{OD_1} = \frac{OF_1}{OA_1},$$

Fig. 8.ª e 9.ª

e ricordando che in ogni proporzione la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al proprio conseguente, avremo:

$$\frac{OA_1 - OF_1}{OD_1 - OA_1} = \frac{OF_1}{OA_1}, \quad \text{oppure} \quad \frac{OF_1 - OA_1}{OA_1 - OD_1} = \frac{OF_1}{OA_1},$$

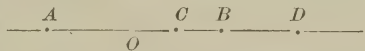
ma i primi rapporti, a prescindere dal segno, si riducono ad $\frac{A_1F_1}{A_1D_1}$ e rappresentano l'eccentricità, dunque

$$k = \frac{OF_1}{OA_1}.$$

---

guente sua proprietà:

Se O è il punto medio di AB, $OB^2 = OC \cdot OD$.

Ciò si può brevemente dimostrare così: Siano $ABCD$ i punti armonici e sia O il punto medio di AB; dalla proporzione $AC:CB = AD:BD$ risulta che, se è $AC > CB$ è pure $AD > BD$, e perciò i punti C e D si trovano dalla stessa parte di O, e si ha che

A O C B D

$$AC = AO + OC = OB + OC \quad , \quad AD = AO + OD = OB + OD \, ,$$
$$CB = OB - OC \quad , \quad BD = OD - OB \, ,$$

e sostituendo nella precedente proporzione, si ha

$$OB + OC : OB - OC = OB + OD : OD - OB \, ;$$

e sapendo che in una proporzione la somma dei primi due termini sta alla loro differenza come la somma degli altri due termini sta alla loro differenza, si ha:

$$2OB : 2OC = 2OD : 2OB \quad \text{e quindi anche} \quad OC : OB = OB : OD \, .$$

Da ciò si deduce che la circonferenza si può considerare come una conica che abbia l'eccentricità eguale a zero.

19. Scolii. 1.° Dall'essere il centro della conica punto medio di F_1F_2, ne risulta $\frac{OF_1}{OA_1} = \frac{OF_2}{OA_2}$, e quindi si conferma che *il rapporto costante delle distanze dei punti dell'ellisse e dell'iperbole da un fuoco e dalla sua direttrice, è uguale a quello delle sue distanze dall'altro fuoco e dalla relativa direttrice.*

2.° *Le due direttrici dell'ellisse e dell'iperbole distano egualmente dai vertici della conica, e quindi dal centro della conica.*

Infatti, essendo $\frac{A_1F_1}{A_1D_1} = \frac{A_2F_2}{A_2D_2}$ ed inoltre $A_1F_1 = A_2F_2$, si si ha pure $A_1D_1 = A_2D_2$, $OD_1 = OD_2$.

3.° Dalla proporzione $\frac{OA_1}{OD_1} = \frac{OF_1}{OA_1}$ si ricava pure che *la eccentricità dell'ellisse e dell'iperbole può rappresentarsi mediante il rapporto del semiasse focale alla distanza della direttrice dal centro della conica, e quindi anche con* $\frac{A_1A_2}{D_1D_2}$.

4.° Per costruire la direttrice corrispondente al fuoco F_1 di un'ellisse o iperbole di cui si conosca pure l'asse focale, basta trovare il punto D_1 coniugato armonico di F_1 rispetto ad A_1 e A_2 ed elevare da esso la perpendicolare ad A_1A_2.

20. Teor. 7.° *Nell'ellisse la somma e nell'iperbole la differenza dei raggi focali di ogni punto della curva è costante ed eguale all'asse focale.*

Questo teorema si può dedurre direttamente dal cono osservando (fig. 1ª e 2ª) che dall'essere $MF_1 = MK = CG$, ed analogamente $MF_2 = CH$, risulta per l'ellisse

$$MF_1 + MF_2 = HG = A_1A_2 \; .$$

e per l'iperbole

$$MF_2 - MF_1 = GH' = A_1A_2 \; .$$

Invece, volendo dedurre il teorema dalla conica soltanto si dirà: Dal teor. 2.° *a*) si ha:

$$\frac{MF_2}{D_2N}=\frac{MF_1}{ND_1}$$

e ricordando che in una proporzione la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al proprio conseguente, si ha:

$$\frac{MF_2 \pm MF_1}{D_2N \pm ND_1}=\frac{MF_1}{D_1N}.$$

Si osservi che nell'ellisse (fig. 10.ª), essendo N interno a D_1D_2,

$$D_2N + ND_1 = D_2D_1 ,$$

e nell'iperbole (fig. 11.ª) invece

$$D_2N - D_1N = D_2D_1 ,$$

e si abbia presente che (n.° **19**, 3.°) il rapporto

$$\frac{MF_1}{D_1N}=\frac{A_1A_2}{D_1D_2} ;$$

da ciò la precedente proporzione diventa:

$$\frac{MF_2 \pm MF_1}{D_2D_1}=\frac{A_2A_1}{D_2D_1}$$

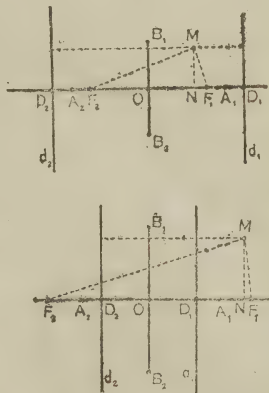
donde

$$MF_2 \pm MF_1 = A_2A_1 = 2a .$$

Fig. 10.ª e 11.ª

Il teorema si può anche conchiudere così: dalla proporzione

$$\frac{MF_2 \pm MF_1}{D_2D_1}=\frac{MF_1}{D_1N}$$

si ha che il rapporto $\dfrac{MF_2 \pm MF_1}{D_2D_1}$ è costante, ma è costante

il suo conseguente, quindi è anche

$$MF_2 \pm MF_1 = \text{cost.}$$

Se il punto M coincide con A_1, si ha:

$$A_1F_2 \pm A_1F_1 = A_2A_1 \ .$$

dunque la costante è appunto la lunghezza $2a$ dell'asse focale.

21. Teor. 8.° *Se un punto del piano di un'ellisse o di una iperbole, non appartenente alla curva, si congiunge con i due fuochi, si ha per l'ellisse* $PF_1 + PF_2 >$ *o* $< A_1A_2$ *e per l'iperbole* $PF_2 - PF_1 >$ *o* $< A_1A_2$ (*supposto* $PF_2 \geqq PF_1$).

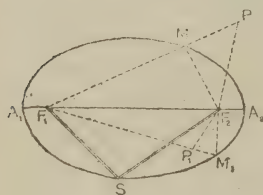



Fig. 12.ª

Consideriamo il caso dell'ellisse (fig. 12.ª) e supponiamo prima che il punto P sia esterno alla curva. Sia M il punto d'incontro del segmento PF_1 con la curva e si congiunga M con F_2. Già si sa che

$$F_1M + MF_2 = 2a$$

ma $MF_2 < MP + PF_2$, dunque sostituendo si ha

$$F_1P + PF_2 > 2a \ .$$

Sia invece P_1 un punto interno alla curva; M_1 il punto d'incontro del prolungamento di F_1P_1 oltre P_1 con la curva. Già si sa che

$$F_1M_1 + M_1F_2 = 2a$$

cioè

$$F_1P_1 + P_1M_1 + M_1F_2 = 2a$$

ma $P_1M_1 + M_1F_2 > P_1F_2$, dunque sostituendo si ha

$$F_1P_1 + P_1F_2 < 2a \ .$$

Dunque, per l'ellisse la somma delle distanze dei punti esterni alla curva dai fuochi è maggiore dell' asse focale, e quella dei punti interni è minore dell' asse focale.

Fig. 13.ª

Nel caso dell' iperbole, (fig, 13.ª) supponiamo che di un punto P il segmento F_1P sia minore o eguale a PF_2 e che F_1P incontri la curva in M. Si congiunga M con F_2, e si noti che pel punto M si ha

$$MF_2 - MF_1 = 2a \ ,$$

ma $MF_2 > PF_2 - PM$, dunque sostituendo si ha

$$PF_2 - PM - MF_1 = PF_2 - PF_1 < 2a \ .$$

Supponiamo poi che di un punto P_1 interno alla carica il segmento maggiore P_1F_2 incontri la curva in M_1 fra P_1 ed F_2, e congiungiamo M_1 con F_1. Già si sa che pel punto M_1

$$M_1F_2 - M_1F_1 = 2a$$

ma $M_1F_1 > P_1F_1 - P_1M_1$, dunque sostituendo si ha

$$M_1F_2 - (P_1F_1 - P_1M_1) = P_1F_2 - P_1F_1 > 2a.$$

Dunque per i punti esterni alla iperbole la differenza delle distanze dai fuochi risulta minore dell'asse focale, e per i punti esterni alla iperbole detta differenza risulta maggiore dell'asse focale.

22. Scolii. Dai teoremi **7.°** e **8.°** si deduce:

1.° *Dati in un piano due punti* F_1 *ed* F_2, *ed una lunghezza* $2a > F_1F_2$, *il luogo geometrico dei punti tàli che la somma delle loro distanze da* F_1 *e da* F_2 *sia costante-*

mente uguale alla data lunghezza 2a *è un' ellisse, i cui fuochi sono* F_1 *ed* F_2 *ed il cui asse focale ha la lunghezza* 2a.

2.° *Dati in un piano due punti* F_1 *ed* F_2, *ed una lunghezza* $2a < F_1F_2$ *il luogo geometrico dei punti tali che la differenza delle loro distanze da* F_1 *ed* F_2 *sia costantemente uguale alla data lunghezza* 2a *è un' iperbole, i cui fuochi sono* F_1 *ed* F_2 *ed il cui asse focale ha la lunghezza* 2a.

23. Probl. 4.° e **5.°** *Descrivere per punti e per moto continuo una ellisse o una iperbole, di cui si conoscano i fuochi e l' asse focale.*

Con le proprietà enunciate negli scolii precedenti anche l'ellisse e l'iperbole si possono descrivere con moto continuo (come si è fatto per la parabola nel n.° **17**, problema 2.°).

Se un filo flessibile e inestensibile si lega con i capi in due punti F_1, F_2 di un piano la cui distanza sia minore della lunghezza del filo, e con una punta di lapis S si tende il filo, facendo scorrere il lapis lungo il filo, si descrive sul piano l'ellisse, che ha per asse focale la lunghezza del filo.

Se un filo flessibile ed inestensibile si lega con uno dei capi in un punto F_2 di due punti dati F_1F_2 di un piano e con l' altro capo alla estremità E di una verga rigida, della quale la lunghezza superi quella del filo di un segmento minore di F_1F_2, e l'altra estremità sia imperniata nell'altro punto F_1 del piano, facendo rotare la verga intorno ad F_1, e tenendo con una punta di lapis in S il filo teso e con una parte aderente alla riga, il punto S descriverà nel piano una parte limitata di un ramo dell' iperbole.

Imperniando la verga in F_2 e legando il filo in F_1 si avrà una parte limitata dell' altro ramo.

24. Teor. 9.° *Se per un punto* M *di un' ellisse si conducono i due raggi focali* MF_1, MF_2, *indi se ne prolunga uno oltre* M *e si conduce la bisettrice dell' angolo formato*

da questo prolungamento con l'altro raggio focale, questa bisettrice ha con la curva solo il punto M *in comune.*

Infatti tagliamo sul prolungamento di F_1M un segmento $MQ = MF_2$ ed uniamo F_2 con Q (fig. 14.ª); F_2Q risulterà perpendicolare alla bisettrice MT e sarà da questa divisa in due parti eguali; ed F_1Q risulterà eguale all'asse focale $2a$. Ciò posto scegliamo un punto qualunque P della bisettrice MT, e uniamolo con F_1, F_2, Q ed osserviamo che dal triangolo PF_1Q si ha:

Fig. 14.ª

$$PF_1 + PQ > F_1Q \ ,$$

cioè

$$PF_1 + PF_2 > 2a \ .$$

Dal quale fatto si deduce che, eccetto il punto M, ogni altro punto della bisettrice MT è esterno all'ellisse.

25. Teor. 10.° *Nell'iperbole la bisettrice dell'angolo formato dai raggi focali di un punto della curva ha comune colla curva solo quel punto.*

Infatti, sul raggio focale maggiore MF_1 di un punto M dell'iperbole (fig. 15.ª) seghiamo a partire da M un segmento $MQ{=}MF_2$ e congiungiamo Q con F_2; la bisettrice MT dell'angolo F_1MF_2 sarà perpendicolare a QF_2 nel suo punto medio N, e QF_1 sarà eguale all'asse focale $2a$ dell'iperbole. Sia P un qualunque altro punto della bisettrice MT, uniamolo con F_1; F_2 e Q, e osserviamo che dal triangolo PQF_1 si ha

Fig. 15.ª

$$PF_1 - PQ < QF_1 \qquad \text{cioè} \qquad PF_1 - PF_2 < 2a \ ,$$

Da ciò si deduce, che eccetto il punto M, ogni altro punto della retta MT è esterno alla curva.

26. Teor. II.° *La bisettrice dell'angolo, che il raggio focale di un punto della parabola fa con la perpendicolare abbassata dal punto alla direttrice, ha comune colla parabola solo quel punto.*

Infatti, sia ME la perpendicolare abbassata dal punto M alla direttrice, MT la bisettrice dell'angolo EMF, e sia P un punto di detta bisettrice (fig. 16ª); si congiunga P con F e con E, sarà $PF=PE$, ma PE è maggiore della distanza PK del punto P dalla direttrice, dunque $PF>PK$ e perciò il punto P è esterno alla parabola. La retta MT ha dunque solo il punto M sulla parabola e tutti gli altri punti esterni ad essa.

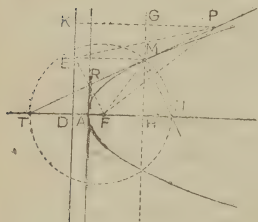



Fig. 16.ª

27. Tangente e normale. Ogni retta come MT, che ha con la curva soltanto un punto M comune, dicesi *tangente* alla curva nel punto M, ed M si dice il suo *punto di contatto.* La perpendicolare ad MT in M si dice *normale* alla curva nel punto M, ed M si dice *piede della normale.*

Dai teoremi 9°, 10, 11° si deduce che:

La tangente all'ellisse in un suo punto è la bisettrice dell'angolo esterno dei raggi focali di quel punto.

La tangente all'iperbole in un suo punto è la bisettrice dell'angolo dei raggi focali in quel punto.

La tangente alla parabola in un suo punto è la bisettrice dell'angolo del raggio focale di quel punto con la perpendicolare abbassata dal punto alla direttrice.

La tangente e la normale di un punto dell'ellisse o dell'iperbole sono le bisettrici degli angoli dei raggi focali che passano per quel punto.

Queste proprietà della tangente e della normale delle curve coniche hanno rese preziosissime siffatte curve nella loro applicazione alla pratica.

Se nel fuoco di una ellisse si pone una sorgente luminosa o calorifica o sonora, i raggi luminosi calorifici o sonori, arrestati dalla curva, si riflettono e vanno a concentrarsi nell'altro fuoco; nel quale quindi si ha maggior luce o calore o percezione di suono che non in qualunque altro punto del piano. Così si spiegano i fenomeni delle sale di forma ellittica, ed il famoso *orecchio di Dionisio.*

Se nel fuoco di una parabola si pone una sorgente luminosa, i raggi incidenti sulla curva, si riflettono in una direzione unica parallela all'asse. Nella quale direzione la luce può essere percepita a grandissima distanza. Ciò si applica alla costruzione dei fari.

Viceverva i raggi solari raccolti sulla curva parabolica che abbia l'asse nella direzione della luce, si concentreranno nel fuoco e potranno accendere o infiammare un qualsiasi oggetto. Così si spiega come si possa a distanza accendere un oggetto per mezzo dei raggi solari, e quindi la verosimiglianza dell'azione che Archimede avrebbe spiegato sulle navi romane a Siracusa.

28. Teor. 12.° *Il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate dai fuochi sulle tangenti della ellisse o dell'iperbole è una circonferenza, che ha per diametro l'asse focale.*

Infatti il punto N (fig. 14.ª e 15.ª) piede della perpendicolare F_2Q condotta dal fuoco F_2 alla tangente MT, è punto medio di F_2Q, quindi per il triangolo F_1QF_2 il segmento ON è eguale alla metà di F_1Q, cioè eguale ad a, e quindi il punto N si troverà sulla circonferenza di centro O e raggio a,

Questa circonferenza si dice *podaria* o *pedale* dei fuochi.

Scolio. Il punto Q è simmetrico di F_2 rispetto alla tangente MT; quindi:

Il luogo dei punti simmetrici di un fuoco rispetto a tutte le tangenti di una ellisse o di una iperbole è una circonferenza di raggio eguale all'asse focale 2a, *che ha l'altro fuoco per centro.*

29. Teor. 13.° *Il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate dal fuoco* F *della parabola su tutte le tangenti è la tangente al vertice della parabola.*

Infatti. (fig. 16.ª) congiungendo F con E, il segmento FE risulta perpendicolare alla tangente MT, e bisecato da essa nel punto R. Sicchè pel triangolo FED, la retta RA, che congiunge il punto R al vertice A della parabola, è parallela ad ED e perciò perpendicolare all'asse della parabola. Ma la perpendicolare in A ad FD è appunto la tangente al vertice della parabola, dunque il luogo del punto R è la tangente al vertice della parabola.

Scolio. Il punto E è simmetrico del fuoco F rispetto alla tangente MT; quindi:

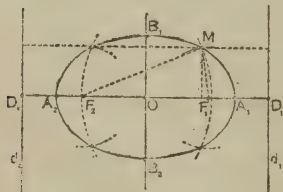
Il luogo dei punti simmetrici del fuoco della parabola per rispetto a tutte le sue tangenti è la direttrice della parabola.

Applicazioni.

30. Probl. 6.° *Dati di un ellisse i fuochi e la lunghezza dell'asse focale, costruire l'ellisse per punti.*

Siano F_1, F_2 i fuochi dati (fig. 17.ª) e $2a$ la lunghezza dell'asse focale (che deve essere $> F_1F_2$ poichè l'eccentricità dell'ellisse è < 1); fatto centro in O, punto medio di F_1F_2, e raggio a si determinino sopra F_1F_2 i punti A_1, A_2, questi saranno i vertici dell'asse focale. Poi, preso un punto S sull'asse fra F_1 e F_2, col centro F_1 e raggio il segmento A_1S si descriva una circonferenza; centro F_2 e raggio il segmento complementare A_2S della data lunghezza $2a$ si descriva un'altra circonferenza: i punti d'incontro M, M' di queste due circonferenze apparterranno all'ellisse. Se coi medesimi centri, ma coi raggi scambiati, si descrivono altre due circonferenze, si otterranno altri due punti M'', M''' della medesima ellisse. In ognuno di questi punti costruendo le bisettrici dei raggi focali si otterranno la tangente e la normale.

Fig. 17.ª

È evidente che tanto i punti M ed M' che M'' ed M''' sono simmetrici fra loro rispetto all'asse focale A_1A_2, e che i punti M ed M'' come pure M' ed M''', sono pure simmetrici fra loro

rispetto alla perpendicolare condotta ad A_1A_2 nel centro O, e quindi la curva è simmetrica per rispetto al centro O. Ciò importa che ogni corda dell'ellisse condotta pel centro è bisecata dal centro stesso. Queste corde si dicono *diametri* dell'ellisse.

I punti B_1, B_2 di questa perpendicolare appartenenti all'ellisse si dicono anche *vertici* dell'ellisse, ed essi si ottengono trovando l'intersezione di questa retta con la circonferenza descritta col centro in uno dei fuochi e raggio a. Dalla costruzione fatta risulta che il segmento B_1B_2 é sempre minore di A_1A_2.

La retta B_1B_2 si dice anche asse dell'ellisse e per distinguere si dice che A_1A_2 è l'*asse maggiore*, o focale, dell'ellisse, e che B_1B_2 ne è l'*asse minore*.

Scolio Se indichiamo con b la lunghezza del semiasse minore, e con c la distanza di un fuoco dal centro dell'ellisse, pel triangolo rettangolo F_1OB_1 si ha

$$c^2 = a^2 - b^2 ,$$

e quindi l'eccentricità

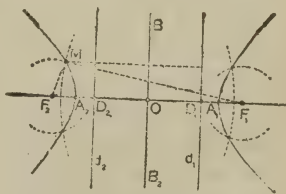
$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} .$$

31. Probl. 7.° *Dati di un' iperbole i fuochi e la lunghezza dell' asse focale, costruire l' iperbole per punti.*

Siano F_1, F_2 i fuochi dati (fig. 18.ª) e $2a$ la lunghezza dell'asse focale (che deve essere $< F_1F_2$, essendo l'eccentricità dell'iperbole > 1); fatto centro in O, punto medio di F_1F_2, e con raggio a si determinino sopra F_1F_2 i punti A_1, A_2, questi saranno i vertici dell'asse focale.

Fig. 18ª

Poi, scelto un punto S sull'asse, esterno al segmento F_1F_2, col centro F_1 e col raggio eguale al segmento $A_1S > A_1F_1$ si descriva una circonferenza; col centro F_2 e con raggio A_2S si descriva un'altra circonfe-

renza; i punti M, M' in cui s'intersecano le due circonferenze appartengono all'iperbole.

Se con i medesimi centri, ma con i raggi scambiati, si descrivono altre due circonferenze, si otterranno altri due punti M'', M''' della medesima iperbole. In ognuno di questi punti costruendo le bisettrici dei raggi focali si hanno la tangente e la normale alla curva.

Tanto i punti M, M' che i punti M'', M''' sono simmetrici fra loro rispetto all'asse A_1A_2; i punti M, M' sono simmetrici di M'', M''' rispetto alla perpendicolare in O alla retta A_1A_2, però su questa retta non vi sono punti dell'iperbole. Questa perpendicolare si dice pure *asse* dell'iperbole. e per distinguerlo dall'asse A_1A_2 si dice *asse non focale*,

Essendo l'iperbole simmetrica rispetto a due assi fra loro perpendicolari, essa ha pure un centro di simmetria nel punto O; perciò ogni corda dell'iperbole che passa per O è bisecata dal punto O. Queste corde si chiamano *diametri* dell'iperbole.

32. Probl. 8.° *Dati di una parabola il fuoco e la direttrice, costruire la parabola per punti.*

Sia F il dato fuoco (fig. 16.ª) e DK la data direttrice; abbassando dal punto F la perpendicolare FD sulla direttrice, il punto medio A del segmento FD è il vertice della curva, e la perpendicolare in A all'asse è la tangente al vertice. Ciò posto tiriamo una retta qualunque HG perpendicolare all'asse in un punto H, che trovisi dalla banda del vertice ove è il fuoco F, se centro F e raggio DH descriviamo la circonferenza, questa incontra la retta HG in due punti M, M', appartenenti alla parabola.

Ora, se si congiunge il punto M con quel punto d'incontro T della circonferenza precedentemente descritta con l'asse situato rispetto ad F da banda opposta ad A, si avrà in MT la tangente alla parabola nel punto M.

Infatti, essendo $FM = FT$, perché raggi dello stesso cerchio, si ha che ang. FMT=ang. FTM, ma quest'angolo FTM è pure eguale all'angolo EMT; dunque si ha che MT è bisettrice dell'angolo FME e perciò è la tangente cercata.

Se N è il secondo punto d'incontro della circonferenza

di raggio PM con l' asse della parabola, sarà MN la normale della curva in M.

33. Probl. 9.° *Dati di una parabola la tangente al vertice ed il fuoco, costruirla per tangenti.*

Sia AR (fig. 16.ª) la tangente data ed F il fuoco; la perpendicolare FA tirata da F alla tangente data sarà l'asse della parabola, e se dal punto D simmettrico di F rispetto ad A si tira la parallela ad AR sarà questa la direttrice della parabola.

Si tiri per F una qualunque retta che incontri in R la tangente al vertice, per R si tiri la perpendicolare RP ad FR, sarà questa una tangente della curva.

Se dal punto d'incontro E di FR con la direttrice si tira la parallela all'asse, questa determinerà sulla tangente il punto di contatto M. Infatti, essendo il punto E simmetrico di F rispetto ad MP sarà $ME = MF$.

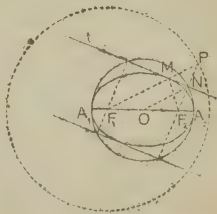
34. Probl. 10.° *Dati di una ellisse o di una iperbole l'asse focale e un fuoco, costruire la conica per tangenti.*

Sia A_1A_2 l'asse focale dell'ellisse ed F_1 il fuoco dato; il punto F_2 simmetrico di F_1 rispetto al punto medio O di A_1A_2, sarà l'altro fuoco.

Si costruisca sul diametro A_1A_2 la circonferenza (la *podaria*) e col centro F_1 e raggio A_1A_2 si costruisca l'altra circonferenza, luogo dei punti simmetrici di F_2 rispetto alle tangenti dell'ellisse.

Si tiri per F_2 una qualunque retta e sia N un punto d'incontro di questa con la podaria, la perpendicolare t ad F_2N in N è una tangente dell'ellisse. Se F_2N incontra oltre N in P la seconda circonferenza, il raggio F_1P di questa circonferenza determina su t il punto di contatto M. Infatti, essendo P simmetrico di F_2 rispetto a t, si ha $MF_2 = MP$, e quindi $MF_1 + MF_2 = A_1A_2$.

Fig. 19.ª

Sia invece A_1A_2 l'asse focale dell'iperbole ed F_1 il fuoco

dato, il simmetrico F_2 di F_1 rispetto al punto O medio di A_1A_2 è l'altro fuoco.

Si costruisca sul diametro A_1A_2 la circonferenza (la *podaria*), e col centro F_1 e raggio A_1A_2 si costruisca l'altra circonferenza, luogo dei punti simmetrici di F_2 rispetto alle tangenti dell'iperbole.

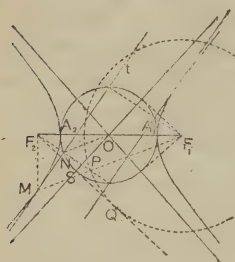



Fig. 20.ª

Si tiri per F_2 una segante alla podaria e sia N un punto d'incontro di essa colla circonferenza suddetta, la perpendicalare t ad F_2N in N è una tangente dell'iperbole; se P è il simmetrico di F_2 rispetto ad N, la retta F_1P determina su t il suo punto di contatto M coll'iperbole. Infatti essendo $MF_2 = MP$, si ha $MF_1 - MF_2 = A_1A_2$.

Si noti che, tanto nell'ellisse che nell'iperbole, per ogni trasversale condotta per F_2 si hanno due tangenti della conica fra loro parallele.

35. Asintoti ed asse ideale dell'iperbole. Si avverta che nella costruzione indicata per l'iperbole (fig. 20ª) vi è un caso limite interessantissimo. Le due circonferenze (F_1) ed (O) hanno i raggi l'uno doppio dell'altro, quindi il punto F_2 che dista da F_1 il doppio di OF è il centro di omotetia diretta delle due circonferenze; e perciò una tangente condotta da F_2 ad (O) sarà tangente anche all'altra circonferenza (F_1). Indicando con Q ed S i punti di contatto di questa tangente con le due circonferenze, sarà OS parallela ad F_1Q, e quindi mentre OS è, per la costruzione indicata, una tangente della iperbole, su questa non vi è il punto di contatto. Questa speciale tangente a cui la curva tende ad avvicinarsi senza mai raggiungerla è un *asintoto* della iperbole.

Cosicché l'iperbole *ha due asintoti* e la loro costruzione è quella qui sopra indicata, cioè essi si trovano congiungendo il centro ai punti di contatto delle tangenti condotte da un fuoco alla podaria.

36. Teor. 14.º Si considerino nuovamente (fig. 21.ª), del-

l'iperbole di asse focale A_1A_2 e dai fuochi F_1F_2, la circonferenza podaria O e gli asintoti costruiti, come si è detto nel numero precedente, conducendo da F_1 le tangenti F_1P, F_1P' alla podaria. Si tiri in A_1 la tangente alla circonferenza e sia C il suo punto di incontro con uno degli asintoti. Si completi il rettangolo che ha due lati nelle tangenti della iperbole nei vertici A_1, A_2 ed i vertici sugli asintoti, e siano B_1, B_2 i punti in cui gli altri lati segano l'asse non focale. Il segmento B_1B_2 di questo asse si assume come lunghezza del semiasse non focale dell'iperbole. L'asse non focale dicesi pure *asse ideale*, per ragioni che qui sarebbe difficile dare *); per contrapposto l'*asse focale* si dice anche *asse reale*. I due triangoli rettangoli OCA_1, OF_1P sono eguali per avere un cateto ed un angolo acuto eguale, quindi A_1C, che è eguale al semiasse ideale, è pure eguale ad F_1P, cioè alla lunghezza della tangente condotta dal fuoco alla podaria, ed inoltre risulta che

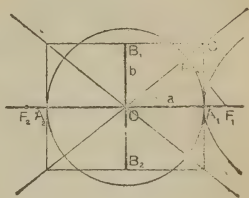



Fig. 21.ª

$$A_1B_1 = OC = OF_1 \ .$$

Indicando con b il semiasse ideale, con c la distanza del fuoco dal centro si ha

$$c^2 = a^2 + b^2 \ ,$$

e quindi l'eccentricità

$$k = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \ .$$

Se i semiassi sono eguali, gli asintoti risultano fra loro perpendicolari e l'iperbole si dice *equilatera*. Nella iperbole

---

*) Si possono vedere in: Amodeo, *Lezioni di Geometria proiettiva*, pp. 356 e seg.

equilatera la distanza del fuoco dal centro è $=a\sqrt{2}$, e quindi la sua eccentricità $=\sqrt{2}$.

Viceversa, qualora di una iperbole siano dati i semiassi: *Se sopra i semiassi* OA_1, OB_1 *dell'iperbole si costruisce il rettangolo, una diagonale di esso è un asintoto, e l'altra è parallela all'altro asintoto.*

37. Equazione dell'ellisse e dell'iperbole. Si prendano per assi di coordinate i due assi dell'ellisse o dell'iperbole ed indichiamo con x ed y le coordinate del punto M. Dai triangoli rettangoli formati dai raggi focali con l'asse focale e con la perpendicolare abbassata da M sull'asse focale risulta (fig. 17ª e 18ª) che

$$MF_1 = \sqrt{y^2 + (x-c)^2} \quad , \quad MF_2 = \sqrt{y^2 + (x+c)^2}$$

e quindi per le proprietà enunciate nel n. **22**, il luogo del punto M è dato rispettivamente da

$$\sqrt{y^2+(x-c)^2} + \sqrt{y^2+(x+c)^2} = 2a\ .$$

$$\sqrt{y^2+(c-x)^2} - \sqrt{y^2+(c+x)^2} = \pm 2a\ ;$$

Separando i radicali ed elevando a quadrato si ha

$$y^2+x^2+2cx+c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{y^2+(x-c)^2} + y^2+x^2-2cx+c^2$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{y^2+(x-c)^2}\ .$$

Elevando nuovamente a quadrato

$$c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2(y^2+x^2-2cx+c^2)$$

e riducendo

$$c^2x^2 + a^4 = a^2y^2 + a^2x^2 + a^2c^2\ ,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

equazione che vale tanto per l'ellisse che per l'iperbole.

Ma per l'ellisse $a^2-c^2=b^2$, per l'iperbole $a^2-c^2=-b^2$ dunque:

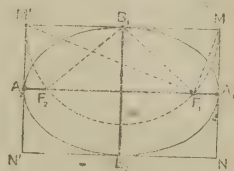
l'equazione dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

l'equazione dell'iperbole è $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

38. Probl. 11.° *Dati di una ellisse le lunghezze dei due assi, costruirla per punti o per tangenti.*

Siano $2a$ e $2b$ le lunghezze dei due assi dati (fig. 22.ª); sopra due rette perpendicolari, a partire dal loro punto d'incontro O, si taglino sull'una due segmenti OA_1, OA_2 eguali ad a, e sull'altra due segmenti OB_1, OB_2 eguali a b, saranno A_1, A_2, B_1, B_2 i vertici dell'ellisse. Indi centro in B_1 (vertice dell'asse minore) e con raggio a si descriva una circonferenza, essa segherà A_1A_2 in due punti F_1, F_2, che saranno i fuochi dell'ellisse (cfr. lo Scolio del problema 6.°, n.° **30**).

Fig. 22.ª

Trovati i fuochi si costruisce l'ellisse per punti o per tangenti come nei problemi 6.° e 10.° dei n.ⁱ **30** e **34**.

39. Probl. 12.° *Dati di una iperbole le lunghezze dei due assi, reale ed ideale, costruirla per punti o per tangenti.*

Sieno $2a$ e $2b$ le lunghezze degli assi dati, il primo reale, il secondo ideale (fig. 23.ª); sopra due rette perpendicolari, a partire dal punto d'incontro O, si taglino sull'una due

segmenti OA_1, OA_2 eguali ad a, sull' altra due segmenti OB_1, OB_2 eguali a b, saranno A_1, A_2 i vertici dell'iperbole. Centro O, e raggio A_1B_1 si taglino su A_1A_2 i segmenti OF_1, OF_2, saranno F_1, F_2 i fuochi. Trovati i fuochi si costruisce l'iperbole per punti o tangenti, come si è visto nei problemi 7.° e 10.° dei n.i **31** e **34**. Si noti però che mediante gli assi si possono costruire anticipatamente gli asintoti, costruendo le diagonali del rettangolo $MNM'N'$ di cui i lati sono paralleli agli assi, e passano per i vertici.

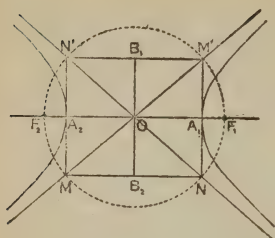
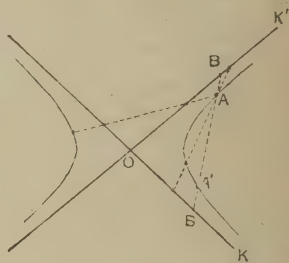



Fig. 23.ª

Scolio. Si avverta che costruiti gli asintoti OK, OK' di una iperbole (fig. 24.ª), se di essa si conosce un punto solo A, la curva si può descrivere anche con la seguente regola:

Per A *si tiri una trasversale, che seghi gli asintoti in* B *e* B', *si prenda a partire da* B' *un segmento* B'A' *eguale e di senso contrario a* BA, *sarà* A' *un altro punto dell'iperbole.*

Per la dimostrazione si veggano le pp. 315-316 delle già citate *Lezioni di Geom. proiett.* *).

Fg. 24.ª

40. Probl. 13. *Trovare i punti d' intersezione di una retta con una ellisse o con una iperbole data mediante l'asse focale e i fuochi.*

(Il caso della parabola è stato trattato al n.° **16**, 4.°).

Sia A_1A_2 l'asse focale, F_1, F_2 i fuochi della conica ed r la retta data (fig. 25.ª). Se M è un punto d'inconto di r con la conica, congiungendo con F_1 ed F_2, e prolungando MF_1 di un segmento MP eguale ad MF_2 si ha che il punto P appartiene alla circonferenza di centro F_1 e raggio A_1A_2,

*) Cfr. la pag. I.

sicchè il punto M è equidistante da F_2 e dalla detta circonferenza, e perciò è il centro di una circonferenza che passa per F_2 e tocca la circonferenza di centro F_1. Dunque il problema si riduce a trovare il simmetrico F'' del fuoco F_2 rispetto alla retta r, ed a costruire i centri M, M' delle circonferenze che passino per F'' ed F_2 e tocchino la circonferenza di centro F_1 e raggio A_1A_2. I centri M ed M' sono i punti richiesti.

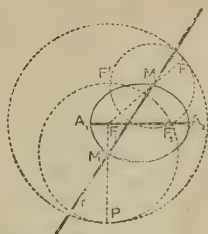



Fig. 25.[a]

Il problema è quindi ricondotto ad un problema noto di Geometria elementare; e perciò si fa passare una circonferenza per $F'F_2$ e per un punto K della circonferenza (F_1), e se K' è il il rimanente punto comune a queste due circonferenze si trova il punto $F_2F' \cdot KK' = O$ e da questo si conducono le due tangenti alla circonferenza (F_1), i punti di contatto di queste tangenti sono i punti cercati P, P'. Congiungendo P e P', con F_1 queste rette determineranno sulla retta data i punti M, M'. Il problema ammette non più di due soluzioni; quindi si conferma che una conica non può essere segata da una retta in più di due punti.

41. Probl. 14.° *Condurre da un punto esterno all' ellisse, o all' iperbole o alla parabola, le tangenti alla curva, supponendo che la conica sia data per mezzo dei fuochi e dell' asse focale.*

1.° Tratteremo prima il caso dell'ellisse e dell'iperbole.

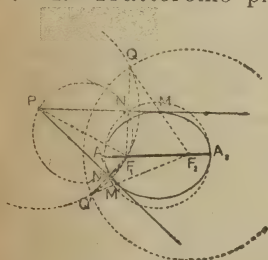



Fig. 26.[a]

Sia P il punto dato, A_1A_2 l'asse focale, F_1, F_2 i fuochi (fig. 26.[a]). Sopra A_1A_2 si costruisca la circonferenza podaria della conica, e sulla retta PF_1 presa come diametro si costruisca un'altra circonferenza.

Ogni punto d'incontro N di queste due circonferenze congiunto con P darà una tangente, perchè l'angolo PNF_1 è retto e il punto N appartiene alla podaria del fuoco.

Trovando il simmetrico Q di F_1 rispetto ad N e congiungendolo con F_1, si avrà nella intersezione di F_1Q con la tangente PN, il punto di contatto M della stessa tangente.

Un'altra soluzione del problema è la seguente.

Si costruiscano le circonferenze una di centro P e raggio PF_1, l'altra di centro F_2 e raggio A_1A_2 (fig. 26.ª). Se Q è un loro punto d'incontro, la perpendicolare abbassata da P a F_2Q sarà una tangente richiesta, e il suo incontro con QF_2 sarà il punto di contatto M di essa con la conica.

2.° Pel caso della parabola sia F il fuoco ed A il vertice (fig. 27.ª). Si tiri la tangente al vertice della parabola e sopra PF come diametro si costruisca la circonferenza, se questa incontra la tangente al vertice in un punto R, sarà PR una tangente richiesta; perché l'angolo PRF è retto, ed R appartiene alla podaria del fuoco.

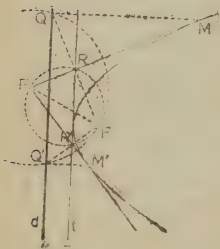



Fig. 27.ª

Trovando il simmetrico Q di F rispetto ad R e tirando da esso la parallela all'asse della parabola si avrà nell'intersezione di questa retta con la tangente PR il punto di contatto M della stessa tangente.

Un'altra soluzione del problema è la seguente (fig. 27.ª). Si costruisca la direttrice, e la circonferenza di centro P e raggio PF, se Q è un punto d'incontro della direttrice con la circonferenza, la perpendicolare abbassata da PF ad FQ è una tangente richiesta, e la perpendicolare condotta da Q alla direttrice determina sulla tangente il punto di contatto.

42. Probl. 15.° *Costruire le tangenti di una conica parallele ad una retta data.*

Supposto la conica data al modo istesso del problema precedente, se si tratta di una ellisse o iperbole (fig. 28.ª), basterà abbassare da un fuoco F_1 la perpendicolare alla data direzione t e trovare le intersezioni N, N' con la circonferenza podaria; le parallele condotte da N ed N' alla retta r saranno le richieste tangenti.

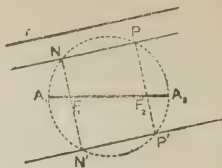



Fig. 28.ª

Se si tratta invece di una parabola (fig. 29.ª) si abbassi dal fuoco F la perpendicolare alla direzione r data, e se ne trovi l'incontro R con la tangente al vertice, la parallela condotta da R alla retta r sarà l'unica tangente che risponde al problema.

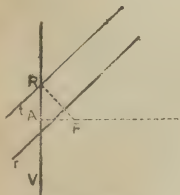



Fig. 29.ª

Dalla costruzione fatta risulta che la parabola non ha coppie di tangenti parallele.

43. Termineremo col lasciare allo studioso la dimostrazione del seguente teorema dovuto a Newton, e da lui pubblicato nel lemma XIV del libro I dei suoi immortali *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* (Londra, 1687).

Dimostrare che la distanza del fuoco di una parabola dalla tangente è media proporzionale fra la distanza del fuoco dal punto di contatto della tangente stessa e la distanza del fuoco dal vertice della curva.

FINE

(c)

D.r FEDERICO AMODEO

libero docente di Geometria proiettiva
e di Storia delle Matematiche nella R. Università di Napoli;
prof. ordinario del R. Istituto tecnico di Napoli,
socio residente dell'Accademia Pontaniana, ecc.

COMPLEMENTI DI ANALISI ALGEBRICA ELEMENTARE

CON APPENDICE SULLE SEZIONI CONICHE

PARTE SECONDA DEL VOLUME SECONDO

DEGLI

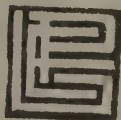
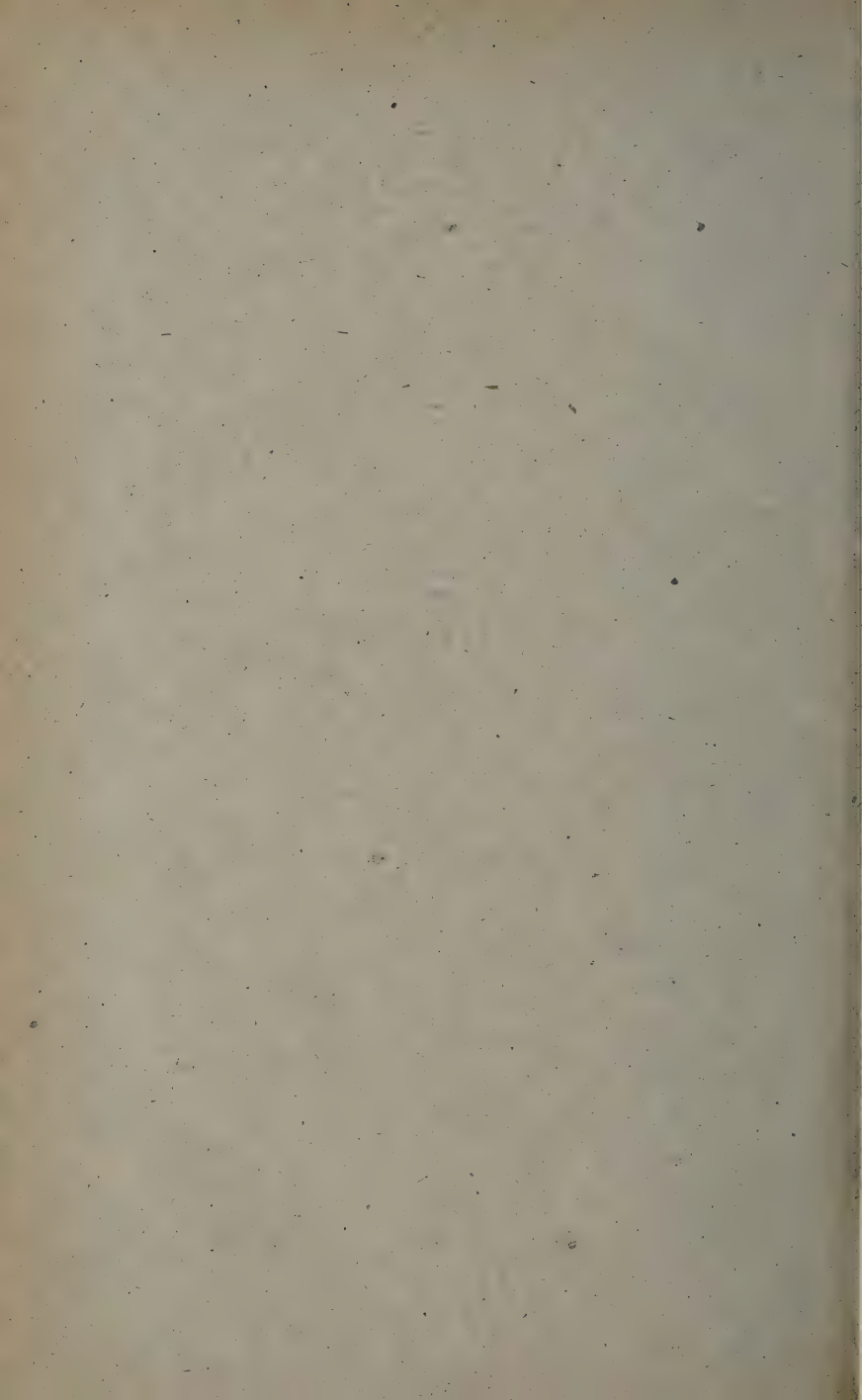
ELEMENTI DI MATEMATICA

**Ad uso del 2° biennio degli istituti tecnici
e della 3ª liceale moderna**

3ª Edizione
migliorata ed aumentata

SOMMARIO — Elementi di Analisi combinatoria. — Frazioni continue — Disequazioni e sistemi di disequazioni. — Analisi indeterminata di 1° grado. — Funzioni finite. Limiti. Applicazioni. — Diagrammi e loro applicazioni. — Funzioni continue. Derivate. Forme indeterminate. Applicazioni. — Massimi e minimi. Discussione delle funzioni. — Discussioni di equazioni e di problemi di 2° grado. — Concetto d'Integrazione.

NAPOLI
LUIGI PIERRO TIP.-EDITORE
Piazza Dante, 76
1920

DELLO STESSO AUTORE

Op. 51 **Vita matematica napoletana** (Parte prima, 1650-1800), studio storico, biografico, bibliografico, con 1 tav. di 3 ritratti fuori testo e 5 ritratti nel testo. Tip. Giannini, Napoli, 1906. Edizione di 125 esemplari . . . . L. 15.00

Op. 3 **Monografia delle curve tautocrone**, 1 vol. in 4°, Tulimiero, Avellino, 1883 . . . . » 5.00

Op. 29_3 **Lezioni di Geometria proiettiva** dettate nella R. Università di Napoli, 3ª ediz., con 420 figure intercalate e numerosi esercizii, 2ª ristampa, con Appendice, 1912. Pierro, Napoli . . . » 14.00

Op. 42 (a). **Aritmetica particolare e generale con appendice sulle equazioni di 1° grado**, ad uso delle scuole medie di 2° grado e specialmente delle scuole normali, 3ª ediz. migliorata con numerosi esercizii (Vol. I degli Elem. di Matem.), 1910. Pierro, Napoli. » 3.75

Op. 54 (b). **Elementi di Algebra**, ad uso delle scuole medie di 2° grado, con numerosi esercizii, 2ª ediz. (Vol. II. P. I. degli Elem. di Matem.), 1910. Pierro, Napoli . . . . » 2.50

Op. 73_3 (c). **Complementi di analisi algebrica elementare con appendice sulle sezioni coniche**, ad uso del 2° biennio degli Istituti tecnici, con numerosi esercizii (Vol. II. P. II. degli Elem. di Matem.), 3ª edizione, 1920. Pierro, Napoli . . . . . » 7

Op. 80 (d_1). **Aritmetica ed Algebra (Parte prima)**, ad uso della 1ª classe degli Istituti tecnici, con numerosi esercizii, 2ª ediz., 1916. Pierro, Napoli . . . . » 5.0

Op. 80 (d_2). **Aritmetica ed Algebra (Parte seconda)**, ad uso della 2ª classe degli Istituti tecnici, con numerosi esercizii, 2ª ed. 1920. Pierro, Nap. » 5.00

Op. 57 (g). **Aritmetica razionale**, ad uso della 4ª e 5ª classe del ginnasio, con numerosi esercizii, 4ª ediz. 1914. Pierro, Napoli . . . . » 3.5

Op. 87 (h). **Aritmetica generale ed Algebra**, ad uso della 1ª e 2ª classe liceale, con numerosi esercizii, 2ª ediz. adattata ai vigenti programmi, 1912. Pierro, Napoli . . . . » 5.00

Op. 58 (i). **Aritmetica particolare e generale ed Algebra**, ad uso della 3ª classe liceale, con numerosi esercizii, 3ª ediz. adattata ai vigenti programmi, 1912. Pierro, Napoli . . . . » 2.00

Op. 92 (k). **Aritmetica pratica**, ad uso del ginnasio inferiore e della scuola complementare, con numerosi esercizii, 3ª ediz. 1919. Albrighi, Segati e C.i, Roma . . . . » 3.00

Op. 92 (l). **Aritmetica pratica, con appendice sul calcolo letterale e sulle equazioni di 1° grado**, ad uso delle scuole tecniche, complementari e 1ª normale, con numerosi esercizii, 2ª ediz. 1917. Albrighi, Segati e C.i, Roma . . . . » 3.50

» (m). **Calcolo letterale ed equazioni lineari**, ad uso delle scuole tecniche e 1ª normale, con numerosi esercizii. 1911. Pierro, Napoli. » 1.00

Op. 101 (n). **Aritmetica generale ed Algebra conforme ai programmi del Liceo Moderno (Parte prima)**, ad uso della 1ª e 2ª classe, 1916. Pierro, Napoli . . . . » 5.00

— (o). **Aritmetica ed Algebra**, ad uso della 3ª classe del Liceo moderno (in corso di stampa). . . . . » 4.0

Op. 56 **Equazioni di 1° grado ad una incognita**. Pierro, Napoli . » 0.3

(Edizioni **A. Vallardi, Genova, Milano, Napoli, Roma**)

Op. 53 **Abbaco o primi elementi di Aritmetica** ad uso della 1ª classe elem. . » 0.15

» **Abbaco o primi elementi di Aritmetica** ad uso della 2ª » » . » 0.20

» **Primi elementi di Aritmetica e Geometria** ad uso della 3ª » » . » 0.

» **Nozioni elementari di Aritmetica e Geom.** ad uso della 4ª » » . » 0.

» **Noz. elem. di Arit. Geom. e Computisteria** ad uso della 5ª e 6ª » » . » 1.